DIE EIGENSCHAFTEN DERJENIGEN KOLLINEATIONEN DIE ZWEI KONJUGIERT IMAGINÄRE WINDSCHIEFE GERADEN IM RAUME FESTLASSEN

INAUGURALDISSERTATION
ZUR ERLANGUNG DES DOKTORGRADES
GENEHMIGT VON DER
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN FAKULTÄT
DER FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT
ZU BERLIN

VON

MARGARETE SALZERT
AUS BERLIN

TAG DER MÜNDLICHEN PRÜFUNG: 8. MAI 1940
TAG DER PROMOTION: 16. OKTOBER 1940

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG

N 55

REFERENTEN:
DOZENT DR. H. KNOTHE
PROFESSOR DR. L. BIEBERBACH

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Sonderabdruck aus den „Schriften des Mathematischen Instituts und des Instituts für angewandte Mathematik der Universität Berlin" / Band 5

Einleitung.

Die Gruppe derjenigen Kollineationen, die zwei beliebige windschiefe Geraden im Raume festlassen, ist schon unter den verschiedensten Gesichtspunkten diskutiert worden. Der Grund zu dieser vielfältigen Erörterung ist wohl darin zu suchen, daß einem die Möglichkeit gegeben ist, dieses Problem vom flächentheoretischen wie vom liniengeometrischen Standpunkt zu erfassen; denn die beiden Geraden, welche zwei in sich duale Elemente im Raum darstellen, können sowohl als Bestimmungsstücke von Systemen bzw. Geweben algebraischer Flächen (F_n-Systemen bzw. Φ_n-Geweben) wie auch als Brennlinien eines linearen Geradensystems aufgefaßt werden.

Von den durch die beiden Geraden festgelegten Mannigfaltigkeiten hat begreiflicherweise das F_2-System und das Φ_2-Gewebe, welches auch den Namen Gebüsche erhalten hat, das größte Interesse in der Literatur gefunden. So lesen wir einzelne Sätze über dieses Gebiet bereits 1868 bei REYE.[1]) 1877 tut REYE[2]) einen bedeutungsvollen Schritt, indem er, wahrscheinlich unter dem Einfluß von KLEINS Erlanger Programm, die Koeffizienten der Gleichung einer beliebigen F_n als Koordinaten in einem anderen Raum betrachtet und die gegebenen Bedingungen zwischen ihnen untersucht. Er behandelt hier auch Gebüsche von Flächen zweiter Ordnung und weist auf etliche spezielle hin, die z. B. unendlich viele Ebenenpaare enthalten. Diese Eigenschaft charakterisiert nämlich unser Flächengebüsch ebenfalls. Bedeutend bereichert wurde dann die diesbezügliche Literatur erst wieder 1882 durch die Dissertation von RASCHE[3]). Zehn Jahre später sind die bis dahin bekannten Ergebnisse in dem Buch über Liniengeometrie von STURM[4]) vereinigt zu finden.

---

1) Th. Reye, *Die Geometrie der Lage*, 2. Abt. Hannover 1868, S. 241—244 und 246—256. — Vgl. auch von demselben Verfasser: *Lehrsätze über Strahlensysteme erster Ordnung und erster Klasse und der lineare Strahlenkomplex*. Journ. f. Math. 69 (1868), S. 365—369. — *Über algebraische Flächen, die zueinander apolar sind*. Ebd. 79 (1875), S. 159—175.

2) Th. Reye, *Über Systeme und Gewebe von algebraischen Flächen*. Journ. f. Math. 82 (1877), S. 1—20.

3) A. Rasche, *Untersuchung der Flächen zweiten Grades, welche durch zwei windschiefe Geraden gehen*. Dissertation Münster 1882.

4) R. Sturm, *Liniengeometrie*. Leipzig 1892, S. 252—257.

Um nun den gesamten mit diesem Problem verbundenen Fragenkomplex in einfacher Weise erfassen zu können, erscheint es als durchaus lohnend, den von REYE gemachten Ansatz für dieses spezielle Gebiet weiter auszuführen, d. h. an dieses Problem unter dem Gesichtspunkte des KLEINschen Erlanger Programms heranzutreten. Es soll die Aufgabe dieser Arbeit sein, die gegebene Geometrie mit zwei windschiefen Geraden als absolutem Gebilde, soweit dies möglich ist, auf eine uns schon bekannte Geometrie zurückzuführen und deren Invarianten in der gegebenen Geometrie zu deuten und umgekehrt.

Am interessantesten ist hier der Fall der konjugiert imaginären windschiefen Geraden und die Gruppe der reellen Kollineationen, die dieses Geradenpaar festlassen. Auf die Bedeutung der Realitätsverhältnisse in dieser zu untersuchenden Geometrie ist bis jetzt in der Literatur überhaupt noch nicht hingewiesen worden, und doch erhält man unter Berücksichtigung gerade dieses Punktes ein sehr wesentliches Ergebnis: die zweistufige Isomorphie dieser Geometrie mit den reellen Kreisverwandtschaften. Dabei ist es wichtig, die Zweistufigkeit der Isomorphie zu beachten, die ja unserer gegebenen Geometrie erst ihren besonderen Charakter verleiht und sie nicht zu einer bloßen Abbildung der MÖBIUS-Geometrie stempelt. Natürlich gewinnen wir auch schon durch die alleinige Anwendung des Übertragungsprinzipes recht interessante Ergebnisse, so z. B. verschiedene Deutungen eines Winkels zweier Geraden, zweier F_2-Büschel und zweier F_2-Bündel. Bemerkenswert ist unter anderem auch die Tatsache, daß man trotz der zweistufigen Isomorphie ohne weiteres mit den Mitteln der MÖBIUS-Geometrie eine Differentialgeometrie von Kurven und Flächen aufbauen kann. Außerdem haben wir auch nicht versäumt, kurz auf den Aufbau einer Differentialgeometrie der Büschelscharen hinzuweisen.

I. Zusammenhang der Gruppe der reellen Kollineationen, die zwei windschiefe konjugiert imaginäre Geraden im Raum festlassen, mit der Gruppe von Möbius und der der räumlichen hyperbolischen Bewegungen.

Gegeben seien zwei windschiefe konjugiert imaginäre Geraden λ_1 und λ_2 als Schnittgeraden der beiden Ebenenpaare

$$(1) \qquad \left.\begin{aligned} z_1 &\equiv \xi_0 + i\xi_3 = 0 \\ z_2 &\equiv \xi_2 + i\xi_1 = 0 \end{aligned}\right\} \lambda_1, \qquad \left.\begin{aligned} z_3 &\equiv \xi_0 - i\xi_3 = 0 \\ z_4 &\equiv \xi_2 - i\xi_1 = 0 \end{aligned}\right\} \lambda_2.$$

Die Untergruppe der reellen Kollineationen, welche jede der beiden windschiefen Geraden einzeln festlassen, lautet dann

$$(2) \qquad \begin{cases} z_1 = f(a w_1 + b w_2), & z_3 = f(\bar{a} w_3 + \bar{b} w_4), \\ z_2 = f(c w_1 + d w_2), & z_4 = f(\bar{c} w_3 + \bar{d} w_4), \end{cases}$$

wobei
$$a = a_1 + i a_2, \quad c = c_1 + i c_2,$$
$$b = b_1 + i b_2, \quad d = d_1 + i d_2$$

konstant sind und f eine beliebige komplexe Größe bedeutet. Daß dies eine reelle Kollineation der ξ_i ist, erkennt man, wenn man

$$w_1 = \zeta_0 + i\zeta_3, \quad w_3 = \zeta_0 - i\zeta_3,$$
$$w_2 = \zeta_2 + i\zeta_1, \quad w_4 = \zeta_2 - i\zeta_1$$

einsetzt. Dann folgt

$$(3) \qquad \begin{cases} \xi_0 = f(a_1\zeta_0 - a_2\zeta_3 + b_1\zeta_2 - b_2\zeta_1), \\ \xi_1 = f(c_2\zeta_0 + c_1\zeta_3 + d_2\zeta_2 + d_1\zeta_1), \\ \xi_2 = f(c_1\zeta_0 - c_2\zeta_3 + d_1\zeta_2 - d_2\zeta_1), \\ \xi_3 = f(a_2\zeta_0 + a_1\zeta_3 + b_2\zeta_2 + b_1\zeta_1). \end{cases}$$

Daß dies ferner die allgemeinste der gesuchten Kollineationen ist, sieht man daraus, daß die Gesamtheit der Ebenen durch λ_1:

$$\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 = 0 \qquad (\alpha_1, \alpha_2 \text{ beliebig komplex})$$

durch die Kollineation wiederum in die Gesamtheit der Ebenen durch λ_1 transformiert wird:

$$\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 = w_1(\alpha_1 a + \alpha_2 c) + w_2(\alpha_1 b + \alpha_2 d).$$

Das Entsprechende gilt von λ_2.

Diese reellen Kollineationen führen konjugiert imaginäre Punkte in ebensolche über, so daß auch die reellen Schnittgeraden der beiden Fixgeraden reell bleiben. Durch die Einführung der z_i statt der ξ_i tritt klar hervor, daß durch Angabe der Kollineation auf der Geraden λ_1 die Kollineation auf der Geraden λ_2 gegeben ist.

Hierzu ist folgende Bemerkung wichtig. Sei z. B. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{w_1}{w_2}$ die Kollineation auf der einen Geraden und $\frac{z_3}{z_4} = \frac{w_3}{w_4}$ die Kollineation auf der anderen Geraden, dann vermag diese Kollineation entweder die Identität oder eine im ξ-Raum von der Identität verschiedene Kollineation darzustellen. Im ersten Fall ist

$$z_1 = faw_1, \quad z_3 = faw_3,$$
$$z_2 = faw_2, \quad z_4 = faw_4,$$

wobei f eine beliebige stetige von einem Parameter abhängige Funktion und a eine beliebige komplexe Konstante ist. Dann bedeutet fa nur eine Umnormierung, d. h. eine identische Transformation sowohl für den ξ-Raum wie für die z-Ebene. Im zweiten Fall ist

$$z_1 = fa\bar{w}_1, \quad z_3 = fa\bar{w}_3,$$
$$z_2 = fa\bar{w}_2, \quad z_4 = fa\bar{w}_4,$$

oder

$$\xi_0 = f(a_1\zeta_0 - a_2\zeta_3), \quad \xi_2 = f(a_1\zeta_2 - a_2\zeta_1),$$
$$\xi_1 = f(a_2\zeta_2 + a_1\zeta_1), \quad \xi_3 = f(a_2\zeta_0 + a_1\zeta_3).$$

Bei der letzten Kollineation bleiben die Kongruenzgeraden, d. h. die Schnittgeraden der Fixgeraden, einzeln und die Fixgeraden Punkt für Punkt fest. Es unterliegen also nur die Punkte auf den Kongruenzgeraden einer Kollineation. Somit sind wir zu folgendem Resultat gekommen:

Ist eine identische Punkttransformation in der z-Ebene gegeben, so ist im ξ-Raum die Kollineation erst dann bestimmt, wenn man auch den Umnormierungsfaktor des konjugiert komplexen Punktes in der z-Ebene kennt. Ist dieser Faktor derselbe, dann resultiert aus der identischen Transformation der z-Ebene auch eine identische Transformation des ξ-Raumes. Ist der Umnormierungsfaktor abgesehen von f aber konjugiert komplex zu dem erst betrachteten, dann ergibt sich eine sogenannte gescharte Kollineation des ξ-Raumes, d. h. die Fixgeraden bleiben Punkt für Punkt fest.

Die Kollineationen, die die beiden Leitgeraden austauschen, welche jedoch keine Gruppe bilden, besitzen, wie man ohne weiteres einsieht, folgende Form:

$$(4) \qquad \begin{cases} z_1 = f(\bar{a}w_3 + \bar{b}w_4), & z_3 = f(aw_1 + bw_2), \\ z_2 = f(\bar{c}w_3 + \bar{d}w_4), & z_4 = f(cw_1 + dw_2). \end{cases}$$

Die Gesamtheit der Kollineationen (2) und (4) bildet also die zu behandelnde Gruppe der reellen Kollineationen.

Aus den vorhergehenden Gleichungen sowie dem oben Gesagten geht jetzt der Zusammenhang der gesuchten reellen Kollineationen mit der Gruppe von MÖBIUS ohne weiteres hervor. Die Kollineationen $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a w_1 + b w_2}{c w_1 + d w_2}$ mit beliebig komplexen a, b, c, d stellen die Gruppe derjenigen reellen Kreisverwandtschaften in der z-Ebene dar, die den Drehsinn eines jeden Winkels erhalten. Für die reellen Antikreisverwandtschaften gilt das Entsprechende. Jedem Punkt der z-Ebene ist wie folgt eine Kongruenzgerade des ξ-Raumes und umgekehrt zugeordnet: Man nehme zur z-Ebene die Ebene $\xi_0 = 0$. Die Kongruenzgerade durch den Punkt $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ treffe die z-Ebene im Punkte $0, \xi_{01}, \xi_{02}, \xi_{03}$. Seine Koordinaten erfüllen somit die Bedingungen

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & \xi_0 & 0 \\ 0 & i & \xi_1 & \xi_{01} \\ 0 & 1 & \xi_2 & \xi_{02} \\ i & 0 & \xi_3 & \xi_{03} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & \xi_0 & 0 \\ 0 & -i & \xi_1 & \xi_{01} \\ 0 & 1 & \xi_2 & \xi_{02} \\ -i & 0 & \xi_3 & \xi_{03} \end{vmatrix} = 0.$$

Das ergibt

$$(6) \qquad \begin{cases} \frac{\xi_{01} - i\xi_{02}}{\xi_{03}} = \frac{\xi_2 + i\xi_1}{\xi_0 + i\xi_3} = \frac{z_2}{z_1} = Z, \\ \frac{\xi_{01} + i\xi_2}{\xi_{03}} = \frac{\xi_2 - i\xi_1}{\xi_0 - i\xi_3} = \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1} = \bar{Z}. \end{cases}$$

Die Eindeutigkeit der Abbildung (6) wird nur an einer Stelle durchbrochen; denn der Kongruenzgeraden, die in der z-Ebene liegt, kann projektiv gesehen, jeder ihrer Punkte zugeordnet werden. Diese Kongruenzgerade ist jedoch zugleich die unendlich ferne Gerade, welche, da wir ja die Ebene $\xi_0 = 0$ vom kreisgeometrischen Standpunkt aus betrachten, aber mit dem unendlich fernen Punkt der z-Ebene identisch ist. Dadurch ist die Mehrdeutigkeit der Zuordnung für diese Gerade ebenfalls behoben.

Die Abbildung (6) kann man jetzt noch durch folgende Überlegung vervollkommnen. Diejenigen für die z-Ebene identischen Kollineationen

$$(7) \qquad \begin{cases} z_1 = f a w_1, \\ z_2 = f a w_2, \end{cases}$$

die eine nichtidentische Kollineation auf den Kongruenzgeraden des ξ-Raumes bedeuten, lassen sich in bestimmter Weise zu den Punkten der Kongruenzgeraden in Beziehung bringen, nämlich so, daß man jedem Punkt ein und derselben Kongruenzgeraden einen bestimmten Faktor a zuordnet, der die entsprechende Kollineation (7) festlegt.

Aus diesen Überlegungen ergibt sich jetzt sofort, daß die Geometrie aller Gebilde, die sich aus Kongruenzgeraden zusammensetzen lassen, durch die MÖBIUS-Geometrie erfaßt wird. Es ist jedoch noch nicht ersichtlich, welche Bedeutung den Invarianten zuzumessen sein wird, die durch Punkte auf ein und derselben Kongruenzgeraden oder auf jeden Fall durch Elemente des ξ-Raumes bestimmt werden, deren Bild in der z-Ebene keinerlei invariante Eigenschaft aufweist. Mit dieser Frage hängt auch das eingangs erwähnte Problem zusammen, die Differentialgeometrie einer Kurve des ξ-Raumes bis auf Kollineationen unserer Gruppe durch eine Differentialgeometrie in der z-Ebene zu ersetzen.

Auf einfache Art und Weise kann man jetzt noch eine Verbindung unserer Gruppe mit der der räumlichen hyperbolischen Bewegungen herstellen. Jede F_2 mit reellen Koeffizienten durch die durch (1) bestimmten Geraden λ_1 und λ_2 läßt sich in der Form

$$(8)\quad x_0(\xi_0^2+\xi_3^2)+x_3(\xi_2^2+\xi_1^2)-2x_1(\xi_0\xi_2+\xi_1\xi_3)-2x_2(\xi_2\xi_3-\xi_0\xi_1)=0$$

schreiben, wobei $x_1^2+x_2^2-x_0x_3\neq 0$ ist. Die Determinante der Matrix dieser F_2 lautet

$$|\mathfrak{M}|=\begin{vmatrix} x_0 & x_2 & -x_1 & 0 \\ x_2 & x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_1 & 0 & x_3 & -x_2 \\ 0 & -x_1 & -x_2 & x_0 \end{vmatrix}$$

$$=(x_3x_0-x_2^2)^2-2x_1^2(-x_2^2+x_0x_3)+x_1^4.$$

Wird $x_1^2+x_2^2-x_0x_3=0$, so ist $|\mathfrak{M}|=0$. Da aber durch die beiden windschiefen Geraden nur nicht ausgeartete F_2 oder Paare konjugiert imaginärer Ebenen gehen können, läßt sich weiter folgern, daß in diesem Falle Rang $\mathfrak{M}=2$ sein muß. Wir wissen nun, daß die Schnittgerade eines solchen Ebenenpaares, eine reelle Kongruenzgerade, zugleich auch Trägerin eines konjugiert imaginären Punktepaares ist, nämlich der Schnittpunkte mit den Fixgeraden. Auf Grund dieser Dualität, die sowohl bei den ausgearteten wie bei den nicht ausgearteten Flächen zweiten Grades durch die beiden Fixgeraden besteht, kann man die Zahlen x_0, x_1, x_2, x_3 sowohl als Koordinaten einer F_2 wie einer Φ_2 ansehen. (Die der F_2 entsprechende Φ_2 lautet

$$x_3(\eta_0^2+\eta_3^2)+x_0(\eta_2^2+\eta_1^2)+2x_1(\eta_0\eta_2+\eta_3\eta_1)+2x_2(\eta_0\eta_1-\eta_2\eta_3)=0;$$

im folgenden werden wir uns aber nur auf die F_2 beschränken.) Diese Koordinaten lassen sich natürlich als Punktkoordinaten in

einem anderen Raum deuten. Da jede Kollineation den Rang der Matrix $\mathfrak{M}$ festläßt, muß bei den Kollineationen, die die beiden windschiefen Geraden festlassen, die Form

$$x_1^2 + x_2^2 - x_0 x_3 = 0 \tag{9}$$

ebenfalls in sich übergehen, also in dem Raum, der die x_i-Koordinaten enthält, die durch (9) dargestellte F_2 festbleiben.

Weiterhin schneidet eine Fläche (8) die Ebene $\xi_0 = 0$ in dem Kreis

$$x_0 \xi_3^2 + x_3(\xi_2^2 + \xi_1^2) - 2 x_1 \xi_1 \xi_3 - 2 x_2 \xi_2 \xi_3 = 0. \tag{10}$$

Führt man in (10) die z_1, z_2 aus (6) ein, so erhält man als Gleichung des Kreises

$$x_0 Z_1 \bar{Z}_1 - x_1 (\bar{Z}_2 Z_1 + Z_2 \bar{Z}_1) + i x_2 (\bar{Z}_2 Z_1 - Z_2 \bar{Z}_1) + x_3 Z_2 \bar{Z}_2 = 0. \tag{11}$$

Diesem Kreis wollen wir die F_2 mit der Gleichung (8) zuordnen. Hierdurch entspricht also eine reguläre F_2 einem regulären Kreis und eine F_2 vom Rang 2 einem Nullkreis. Die x_i sind somit als die tetrazyklischen Koordinaten des Kreises (11) erkannt.

Greifen wir nun noch einmal auf die Tatsache aus der MÖBIUS-Geometrie zurück, daß die komplexen Kollineationen von z die Fläche (9) in sich überführen, so ergeben sich die nachstehenden Zusammenhänge der einzelnen Gruppen. Es entsprechen sich:

ξ-Raum	z-Ebene	x-Raum
Reelle Gruppe der Kollineationen, die die beiden Leitgeraden einzeln festlassen.	Kreisverwandtschaften.	Reelle Gruppe der Kollineationen, die die Fläche (9) festlassen und jede der beiden Geradenscharen auf dieser F_2 in sich überführen.
Reelle Gruppe der Kollineationen, die die beiden Leitgeraden austauschen.	Antikreisverwandtschaften.	Reelle Gruppe der Kollineationen, die die Fläche (9) festlassen und die beiden Geradenscharen auf dieser F_2 austauschen.
Reguläre reelle F_2 durch die beiden Leitgeraden.	Reeller Kreis.	Reeller Punkt außerhalb der Fläche (9).
Ausgeartete F_2 durch die beiden Leitgeraden mit reellen Koeffizienten.	Reeller Nullkreis.	Reeller Punkt auf der Fläche (9).

Im Anschluß hieran soll noch auf einige interessante Untergruppen der Geometrie des ξ-Raumes hingewiesen werden:

Die ebene euklidische Ähnlichkeitsgeometrie ist bekanntlich identisch mit der Geometrie derjenigen Untergruppe der MÖBIUSschen, die den unendlich fernen Punkt festläßt. Es gehen dann nämlich stets wieder Kreise in Kreise und Geraden in Geraden über. Bleibt also im ξ-Raum außer den beiden windschiefen Geraden eine dritte diese beiden schneidende reelle Gerade fest, so muß diese Geometrie, soweit man nur die Kongruenzgeraden als Elemente betrachtet, mit der euklidischen Ähnlichkeitsgeometrie isomorph sein.

Weiterhin besteht auch eine derartige Isomorphie zwischen der Untergruppe der MÖBIUSschen Geometrie, die einen reellen bzw. imaginären Kreis festläßt, und der Gruppe der ebenen hyperbolischen bzw. elliptischen Geometrie. Daraus folgt ein entsprechender Zusammenhang derjenigen Geometrie des ξ-Raumes mit der ebenen hyperbolischen bzw. elliptischen Geometrie, die die beiden windschiefen Geraden und eine reelle bzw. imaginäre F_2 durch diese invariant läßt. So ergeben sich durch die geschilderte Abbildung zugleich räumliche Modelle der drei genannten ebenen Geometrien.

II. Algebraische Invarianten der Gruppe der reellen Kollineationen, die zwei konjugiert imaginäre windschiefe Geraden im Raum festlassen.

Um die Diskussion der Invarianten möglichst übersichtlich zu gestalten, sollen zuerst die invarianten Lagebeziehungen der zu diskutierenden Elemente sowie deren numerische Invarianten den äquivalenten Ausdrücken in der MÖBIUS-Geometrie gegenübergestellt werden. Aus diesen Ergebnissen werden sich späterhin die differentialgeometrischen Invarianten ohne große Mühe ableiten lassen. Sind die Beweise der hier zusammengestellten Tatsachen nicht zu trivial, so folgt stets anschließend noch eine genauere Erklärung.

Um nicht mißverstanden zu werden, sei noch betont, daß die MÖBIUS-Geometrie ebenfalls reelle und imaginäre Elemente kennt, daß aber durch die z_i-Koordinaten nur die reellen Elemente erfaßt werden, durch die tetrazyklischen hingegen auch die imaginären. Da wir es nur mit der Gruppe der reellen Kollineationen zu tun haben, ist es angebracht, nur die Elemente zu betrachten, deren Gleichungen reelle Koeffizienten besitzen. Der Vollständigkeit halber soll aber doch hin und wieder auf die übrigen Elemente aufmerksam gemacht werden. Im dritten differentialgeometrischen Teil dieser Arbeit sollen jedoch nur reelle Elemente behandelt werden.

Es stehen zur Diskussion Punkte, Ebenen, Geraden, F_2 sowie F_2-Mannigfaltigkeiten, die durch die beiden Fixgeraden gehen.

Zu Anfang dieses Kapitels wollen wir auf die Invarianten von Kongruenzgeraden und F_2 eingehen, um die im vorangehenden Abschnitt geschilderten Zusammenhänge zwischen den drei Geometrien noch klarer vor Augen zu führen. In der Behandlung der Invarianten werden wir teils die z_i-, teils die x_i-Koordinaten verwenden. Was die letzteren anbetrifft, so wird noch eine weitere Vereinfachung von Nutzen sein: Wir hatten die invariante F_2 in der Form (9) angenommen. Um nun den Anschluß an die üblichen Darstellungen der MÖBIUS-Geometrie zu finden, sei von jetzt an der genannten F_2 die Gestalt

$$-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \tag{12}$$

gegeben. (9) und (12) gehen aus einander durch die reelle Kollineation

$$x_1^* = x_1, \quad x_0^* = x_0 - x_3,$$
$$x_2^* = x_2, \quad x_3^* = x_0 + x_3$$

hervor. Dann möge unter den nachstehenden Skalarprodukten folgendes verstanden werden:

$$\mathfrak{x}\,\mathfrak{x} = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$
$$\mathfrak{x}\,\mathfrak{y} = -x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

1. Invarianten von Kongruenzgeraden.

ξ-Raum		MÖBIUS-Ebene	
Eine Kongruenzgerade		Ein Punkt	
Invariante Lagebeziehung	Numerische Invariante	Invariante Lagebeziehung	Numerische Invariante
Keine.	Keine.	Keine.	Keine.
Zwei Kongruenzgeraden		**Zwei Punkte**	
Invariante Lagebeziehung	Numerische Invariante	Invariante Lagebeziehung	Numerische Invariante
Können sich auf einer Fixgeraden schneiden, falls nicht beide reell sind.	Keine.	Können mit den unendlich fernen Kreispunkten auf einer Geraden liegen, falls nicht beide reell sind.	Keine.
Können zusammenfallen.		Können zusammenfallen.	

ξ-Raum		Möbius-Ebene	
Drei Kongruenzgeraden		Drei Punkte	
Invariante Lagebeziehung	Numerische Invariante	Invariante Lagebeziehung	Numerische Invariante
Können sich zu zweien oder zu dreien auf einer Fixgeraden schneiden, falls nicht alle reell sind.	Keine.	Können zu zweien oder zu dreien mit den unendlich fernen Kreispunkten auf einer Geraden liegen, falls nicht alle reell sind.	Keine.
Können zusammenfallen.		Können zusammenfallen.	

Vier Kongruenzgeraden		Vier Punkte	
Invariante Lagebeziehung	Numerische Invariante	Invariante Lagebeziehung	Numerische Invariante
Einzelne oder sämtliche können sich auf einer der beiden Fixgeraden schneiden, falls nicht alle reell sind.	Die Doppelverhältnisse der Schnittpunkte der Kongruenzgeraden mit den beiden Fixgeraden.	Einzelne oder sämtliche können mit den unendlich fernen Kreispunkten auf einer Geraden liegen, falls nicht alle reell sind.	Das komplexe Doppelverhältnis $\frac{(z^{III}-z^{I})(z^{IV}-z^{II})}{(z^{III}-z^{II})(z^{IV}-z^{I})}$.
Können zusammenfallen.		Können zusammenfallen.	

Welch einfacher Zusammenhang sich zwischen dem komplexen Doppelverhältnis der vier Punkte in der z-Ebene und den genannten Doppelverhältnissen auf den Fixgeraden ergibt, sieht man durch folgende Betrachtung. Die beiden Ebenen, die durch den Punkt $0, \xi_{01}, \xi_{02}, \xi_{03}$ und durch je eine der Fixgeraden gehen, waren nach (5) durch zwei Determinanten bestimmt, aus denen sich die beiden Gleichungen

$$\mathfrak{E}_1: \quad (\xi_0 + i\xi_3)(\xi_{01} - i\xi_{02}) - (\xi_2 + i\xi_1)\xi_{03} = 0,$$
$$\mathfrak{E}_2: \quad (\xi_0 - i\xi_3)(\xi_{01} + i\xi_{02}) - (\xi_2 - i\xi_1)\xi_{03} = 0$$

ergeben. Die Koordinaten der Ebenen $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ sind also

$$\mathfrak{E}_1: \quad \xi_{01} - i\xi_{02}, -i\xi_{03}, \quad -\xi_{03}, \quad i(\xi_{01} - i\xi_{02}),$$
$$\mathfrak{E}_2: \quad \xi_{01} + i\xi_{02}, \quad i\xi_{03}, \quad -\xi_{03}, \quad -i(\xi_{01} + i\xi_{02}).$$

Die Ebenen schneiden z. B. die Gerade $\xi_0 = 0$, $\xi_1 = 0$ in den Punkten P_1 und P_2 mit den Koordinaten

$$P_1\colon \quad 0, 0, \quad i(\xi_{01} - i\xi_{02}), \xi_{03},$$
$$P_2\colon \quad 0, 0, \quad -i(\xi_{01} + i\xi_{02}), \xi_{03}$$

oder anders ausgedrückt

$$P_1\colon \quad 0, 0, \quad iZ, 1,$$
$$P_2\colon \quad 0, 0, \quad -i\bar{Z}, 1.$$

Bilden wir jetzt die Doppelverhältnisse von vier solchen Punkten P_1 und vier solchen Punkten P_2, so lauten diese Ausdrücke

$$(13)\begin{cases}(P_{11}, P_{12};\ P_{13}, P_{14}) = (iZ^{I}, iZ^{II};\ iZ^{III}, iZ^{IV}) = \dfrac{Z^{III} - Z^{I}}{Z^{III} - Z^{II}} \dfrac{Z^{IV} - Z^{II}}{Z^{IV} - Z^{I}}, \\ (P_{21}, P_{22};\ P_{23}, P_{24}) = (-i\bar{Z}^{I}, -i\bar{Z}^{II};\ -i\bar{Z}^{III}, -i\bar{Z}^{IV}) \\ \qquad = \dfrac{\overline{Z^{III} - Z^{I}}}{\overline{Z^{III} - Z^{II}}} \dfrac{\overline{Z^{IV} - Z^{II}}}{\overline{Z^{IV} - Z^{I}}}.\end{cases}$$

Da die durch vier Kongruenzgeraden bestimmten vier Ebenenpaare auf der Geraden $\xi_0 = 0$, $\xi_1 = 0$ zwei Punktequadrupel mit obenstehendem Doppelverhältnis ausschneiden, tun sie es natürlich auch auf den Fixgeraden selbst. Die Trägergeraden dieser vier Ebenenpaare schneiden aber die MÖBIUS-Ebene in den Punkten $Z^{I}, Z^{II}, Z^{III}, Z^{IV}$, und die einzige Invariante dieser Punkte ist wiederum das Doppelverhältnis (13), das bekanntlich reell ist, wenn die vier Punkte auf einem Kreis bzw. die vier Geraden auf einer F_2 liegen.

Auf die Invarianten von fünf und mehr Kongruenzgeraden einzugehen, ist überflüssig, da sich diese aus den aufgefundenen Invarianten zusammensetzen.

2. Invarianten von Flächen zweiter Ordnung, die durch die beiden Fixgeraden gehen.[5])

ξ-Raum		MÖBIUS-Ebene	
Eine F_2		Ein Kreis	
Invariante Lagebeziehung	Numerische Invariante	Invariante Lagebeziehung	Numerische Invariante
Keine.	Keine.	Keine.	Keine.

5) Gemeint sind hier nur die regulären F_2, da die Invarianten der ausgearteten F_2 schon durch die Invarianten der Kongruenzgeraden erfaßt sind.

ξ-Raum		MÖBIUS-Ebene	
Zwei F_2		Zwei Kreise	
Invariante Lagebeziehung	Numerische Invariante	Invariante Lagebeziehung	Numerische Invariante
Können sich längs einer Kongruenzgeraden berühren oder können sich in zwei reellen oder zwei imaginären Kongruenzgeraden schneiden.	Das Doppelverhältnis dieser beiden F_2 mit den Ebenenpaaren des Büschels, das durch die beiden F_2 festgelegt wird.	Können sich in einem Punkte berühren oder können sich in zwei reellen oder imaginären Punkten schneiden.	Das Doppelverhältnis dieser beiden Kreise mit den Nullkreisen des Büschels, das durch die beiden Kreise festgelegt wird.

Wie man aus den obigen Tatsachen ersieht, ist es notwendig, schon hier einiges über F_2-Mannigfaltigkeiten zu sagen, nämlich über F_2-Büschel. Es seien deshalb im folgenden hierüber kurz einige Tatsachen zusammengestellt, die sich zum Teil ohne weiteres aus der MÖBIUS-Geometrie ergeben.

Zwei F_2 bestimmen ein Büschel. Seine biquadratische Grundkurve besteht aus den beiden Leitgeraden und den zwei Schnittgeraden der genannten F_2. Sie ist also ein windschiefes Vierseit. Abgesehen von den beiden Leitgeraden bestehen die Kanten des dadurch bestimmten Tetraeders aus zwei gemeinsamen Geraden der Büschelflächen und zwei gemeinsamen reziproken Polaren.

Es gibt in unserem Gebüsch nur diese eine Art des F_2-Büschels nach dem STEINERschen Satze: Haben die Büschelflächen zwei Geraden der einen Schar gemein, so haben sie auch noch zwei Geraden der anderen Schar gemein. Die beiden Grundgeraden können reell oder imaginär sein. In jedem Büschel haben wir zwei Ebenenpaare, deren Trägergeraden reell oder imaginär sein können.

Die gemeinsamen reziproken Polaren des Büschels sind auch zugleich die Grundgeraden eines anderen Büschels. Diese beiden Büschel sollen zueinander konjugiert heißen. Die Ebenenpaare dieses zweiten Büschels schneiden sich in den Grundgeraden des ersten.

Zwei Kreise bestimmen ein Kreisbüschel. Seine Grundpunkte bestehen aus den beiden unendlich fernen Kreispunkten und den beiden anderen im Endlichen gelegenen Schnittpunkten der Kreise. Zu jedem solchen Büschel gibt es zwei in bezug auf alle Kreise des Büschels konjugierte Punkte.

Es gibt nur diese eine Art eines Kreisbüschels, nämlich die Gesamtheit der Kreise, die durch zwei Punkte gehen, denn alle Kreise eines Büschels haben außer den uneigentlichen Kreispunkten noch zwei eigentliche gemein. Diese beiden Grundpunkte können reell oder imaginär sein, sie können auch in einen zusammenfallen. In jedem Büschel haben wir zwei reelle oder imaginäre Nullkreise.

Die Nullkreise eines Büschels sind auch zugleich die Grundpunkte eines anderen Büschels. Diese beiden Büschel sollen zueinander konjugiert heißen. Die Nullkreise dieses zweiten Büschels sind die Grundpunkte des ersten.

Es ist unmöglich, daß die Grundgeraden, soweit sie nicht in eine zusammenfallen, bei beiden Büscheln zugleich reell sind.

Es ist unmöglich, daß die Grundpunkte, soweit sie nicht in einen zusammenfallen, bei beiden Büscheln zugleich reell sind.

Auf Grund dieser Zusammenstellung ergibt sich nun ohne weiteres das oben Gesagte über die numerische Invariante zweier F_2. Der Begriff dieser Invariante bedarf aber dennoch einer genaueren Darstellung. Wir hatten im Anfang dieser Arbeit von einer engeren und einer weiteren Gruppe unserer Kollineationen gesprochen. Die weitere Gruppe enthielt sämtliche zu diskutierenden Kollineationen, während die engere sich nur auf die Kollineationen beschränkte, die die Fixgeraden einzeln festließen. Ist nun das genannte Doppelverhältnis der F_2 gleich k, so kann es bei der weiteren Gruppe den Wert $\frac{1}{k}$ annehmen. Die einzigen absoluten Invarianten dieser weiteren Gruppe sind deshalb Funktionen von $k + \frac{1}{k}$. Da wir aus der MÖBIUS-Geometrie wissen, daß sich $\frac{1}{4}\left(k + \frac{1}{k}\right)$ als $\cos^2$ des Winkels zwischen den beiden Kreisen deuten läßt, wollen wir diesen Ausdruck als $\cos^2$ des Winkels der beiden F_2 bezeichnen. Diese Bezeichnung läßt sich auch durch folgende Überlegung rechtfertigen.

Bekanntlich gehen die Polarebenen eines Punktes in bezug auf ein solches F_2-Büschel durch eine feste Gerade. Das Doppelverhältnis von vier F_2 des Büschels ist also gleich dem Doppelverhältnis von vier Polarebenen bezüglich eines beliebigen Punktes. Wählen wir nun den Punkt, dessen Polarebenen wir betrachten, auf einer der Grundgeraden des Büschels, ohne daß er mit den Grundpunkten des räumlichen Vierseits zusammenfällt, dann gehen die Polarebenen durch den Punkt und die Gerade selbst. Wir haben dann das Doppelverhältnis von vier Tangentialebenen an vier F_2 zu betrachten. Diese vier F_2 sind die beiden gegebenen nicht ausgearteten F_2 und die zwei ausgearteten F_2 des Büschels. Die Tangentialebenen an die ausgearteten F_2 des Büschels sind dabei identisch mit den beiden Ebenen, die durch die oben genannten Grundgeraden des Büschels und durch λ_1 bzw. λ_2 gehen. Auf Grund dieser Tatsache erscheint es sinnvoll, den Begriff des Winkels mit diesem Doppelverhältnis zu verbinden. Dem Winkel zweier Kreise in der MÖBIUS-Ebene oder dem Abstand zweier Punkte im hyperbolischen Raum entspricht jetzt also der Winkel zweier F_2 in der Geometrie des ξ-Raumes.

Dieses besprochene Doppelverhältnis läßt sich noch auf ein anderes zurückführen. Auf jeder nicht ausgearteten F_2 verlaufen zwei Geraden-

scharen, von denen die eine stets aus Kongruenzgeraden besteht. Betrachtet man nun eine Gerade b_1 der anderen Schar, so muß diese die gemeinsamen Schnittgeraden g_1 und g_2 der beiden F_2 in zwei Punkten O_1 bzw. O_2 schneiden. Durch O_1 geht aber auch eine solche Gerade b_2 der zweiten Fläche zweiter Ordnung. Die Ebene dieser beiden Geraden b_1 und b_2 schneidet die Fixgeraden in zwei Punkten P_1 und P_2 (vgl. Abb. 1). Aus Gründen der Anschaulichkeit haben wir auch die imaginären Leitgeraden λ_1 und λ_2 in allen Abbildungen stets ausgezogen. Seien außerdem B_1 B_2 und die Schnittpunkte von P_1P_2 mit b_1 und b_2 und sei das Doppelverhältnis $(B_1, B_2; P_1, P_2) = k$, so ist dieses dasselbe Doppelverhältnis, durch welches der Winkel zwischen den beiden F_2 erklärt wurde. Das ergibt sich folgendermaßen:

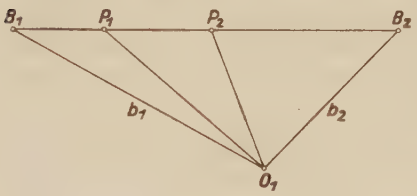

Abb. 1

Wir hatten soeben darauf hingewiesen, daß das Doppelverhältnis zweier F_2 im Büschel zu erklären sei durch dasjenige von vier Tangentialebenen in einem Punkt O_1 der Grundgeraden des Büschels, welcher kein Eckpunkt des gemeinsamen Tangentialtetraeders ist. Unsere beiden Geraden schneiden sich nun in solch einem Punkte O_1.

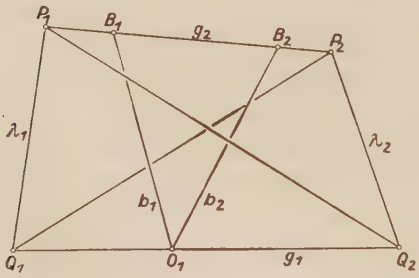

Abb. 2

Sind, wie Abb. 2 zeigt, λ_1 und λ_2 die beiden Fixgeraden, g_1 und g_2 die Grundgeraden des Büschels, dann ist die Tangentialebene im Punkte O_1 an die erste F_2 durch b_1 und g_1, an die zweite F_2 durch b_2 und g_1 bestimmt. Die Tangentialebenen an die ausgearteten F_2 gehen durch die Geraden P_2Q_2, $\overline{Q_2O_1}$ und P_1Q_1, $\overline{Q_1O_1}$. Diese vier Ebenen schneiden auf der Geraden P_1P_2 das Doppelverhältnis $(B_1, B_2; P_1, P_2)$ aus; genau dasselbe Doppelverhältnis hätte man natürlich bei Benutzung des Punktes O_2 statt O_1 erhalten.

Bis jetzt ist immer nur von ungerichteten Kreisen und F_2 gesprochen worden. Gerichtete Kreise[6]) und F_2 haben aber gegenüber unserer Gruppe noch mehr Invarianten. Durch jeden echten Kreis wird die MÖBIUS-Ebene — dasselbe gilt von der F_2 im ξ-Raum — in zwei Gebiete geteilt, in ein positives und ein negatives. Dadurch, daß man

6) W. Blaschke, *Vorlesungen über Differentialgeometrie* III, Berlin 1929, S. 57.

jedem Kreis, d. h. der Punktfolge auf dem Kreis, eine Richtung geben kann, hat man auch eindeutig der Folge der der entsprechenden Regelschar angehörenden Geraden, die nämlich die beiden Leitgeraden schneiden, eine Richtung zuerteilt, in der man sie durchlaufen muß. Jeder Geraden der zweiten Schar, die die Leitgeraden nicht schneidet, ist damit aber eine positive Richtung gegeben worden. Der Winkel φ zweier ungerichteter Kreise ist bekanntlich nur dann eindeutig bestimmt, wenn sie sich rechtwinklig schneiden; sonst kann man nur $\cos^2\varphi$ als Invariante bezeichnen. Durch die Orientierung der Kreise ist jedoch auch $\cos\varphi$ eine Invariante geworden. Man kann also ausdrücklich festlegen, ob man unter dem Schnittwinkel zweier Kreise den spitzen oder den stumpfen verstehen will. Somit ist zwei sich schneidenden Kreisen ein Winkel zwischen o und π zugeordnet.

Der Vollständigkeit halber soll noch erwähnt werden, daß in den tetrazyklischen Koordinaten der $\cos^2\varphi$ zweier F_2 die aus der Möbius-Geometrie bekannte Form besitzt:

$$\cos^2\varphi = \frac{\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}}{(\mathfrak{x}\,\mathfrak{x})\,(\mathfrak{y}\,\mathfrak{y})}\,.$$

In unserer Geometrie haben wir bis jetzt im wesentlichen zwei numerische Invarianten gefunden, nämlich das Doppelverhältnis von vier Kongruenzgeraden und den Winkel zweier F_2. In Wirklichkeit sind dies aber nicht zwei verschiedene Invarianten, sondern eine läßt sich auf die andere zurückführen. Am einfachsten sieht man das am Modell der Möbius-Geometrie ein. Es fehlen uns aber zum Beweis dieser Tatsache noch einige Formeln über F_2-Büschel. Wir werden hierauf noch in 3 eingehen.

Drei F_2		Drei Kreise	
Invariante Lagebeziehung	Numerische Invariante	Invariante Lagebeziehung	Numerische Invariante
Können eine, zwei oder gar keine Kongruenzgerade miteinander gemein haben.	Falls die drei F_2 einem Büschel angehören, besteht eine Gleichung $\alpha\mathfrak{x} + \beta\mathfrak{y} + \gamma\mathfrak{z} = 0$. Die Koeffizienten α, β, γ sind Invarianten. Je drei F_2 haben die Vorzeicheninvariante $\varepsilon = \operatorname{sgn}(\mathfrak{x}\,\mathfrak{y})(\mathfrak{y}\,\mathfrak{z})(\mathfrak{z}\,\mathfrak{x})$.	Können einen, zwei oder gar keinen Punkt miteinander gemein haben.	Falls die drei Kreise einem Büschel angehören, besteht eine Gleichung $\alpha\mathfrak{x} + \beta\mathfrak{y} + \gamma\mathfrak{z} = 0$. Die Koeffizienten α, β, γ sind Invarianten. Je drei Kreise haben die Vorzeicheninvariante $\varepsilon = \operatorname{sgn}(\mathfrak{x}\,\mathfrak{y})(\mathfrak{y}\,\mathfrak{z})(\mathfrak{z}\,\mathfrak{x})$.

Die Vorzeicheninvariante dreier F_2 läßt sich geometrisch folgendermaßen deuten. Zwei Tripel von F_2, die in allen übrigen Invarianten übereinstimmen, aber verschiedenes ε haben, können durch keine Transformation der Gruppe ineinander übergeführt werden; und zwar ist $\varepsilon = -1$, wenn drei reelle F_2 durch stetige Abänderung in drei reelle, verschiedene Kongruenzgeraden (d. h. Ebenenpaare mit reellen Schnittgeraden) übergeführt werden können, ohne daß wir sie dabei in eine Lage bringen, in der irgend zwei F_2 aufeinander senkrecht stehen bzw. eine F_2 durch eine reelle Kongruenzgerade geht, in welche eine der beiden anderen F_2 durch die stetige Abänderung entartet ist. Es ist $\varepsilon = +1$, wenn solche Überführung nicht möglich ist, und $\varepsilon = 0$, wenn irgend zwei F_2 zueinander orthogonal sind.[7])

Gehören die drei F_2 einem Büschel an, dann sind, wie schon oben erwähnt, die Koeffizienten der linearen Kombination invariant; besonders interessant ist noch der Fall, daß die drei F_2 des Büschels K_1, K_2, K_3 sich sämtlich in einer einzigen Kongruenzgeraden berühren, also ein ausgeartetes Büschel bilden. Alle F_2, die dann K_3 gleichsinnig und K_1 ungleichsinnig berühren, werden von K_2 unter demselben Winkel geschnitten.[7])

Da durch drei voneinander linear unabhängige F_2 ein F_2-Bündel bestimmt ist, soll an dieser Stelle noch kurz auf einige sich auf Grund der Abbildung auf die MÖBIUS-Geometrie ergebende Tatsachen aus der Theorie der Bündel hingewiesen werden. Zu jedem F_2-Bündel existiert eine reelle oder imaginäre F_2, die alle F_2 des Bündels rechtwinklig schneidet. Sie ist der geometrische Ort für die Schnittgeraden der zu dem Bündel gehörenden Ebenenpaare. Durch diese F_2 ist also das F_2-Bündel vollständig bestimmt, und eine Kollineation, die jede ausgeartete F_2 des Bündels festläßt, führt auch jede nicht ausgeartete F_2 des Bündels in sich über. Was die eben genannte orthogonale F_2 des Bündels angeht, so sei noch erwähnt, daß ihre zweite Regelschar, die nicht aus Kongruenzgeraden besteht, nach STURM die Gesamtheit der Geradenpaare enthält, die bezüglich aller Bündelflächen zueinander polar sind.

3. Invarianten von F_2-Mannigfaltigkeiten, die durch die beiden Fixgeraden gehen.

In den vorangegangenen Ausführungen sind nur die Invarianten eines Büschels oder Bündels betrachtet worden, es ist hingegen von Interesse, auch auf die Invarianten mehrerer Büschel oder Bündel

7) A. a. O.[6]), S. 57 und 69.

einzugehen. Die Invarianten zweier Bündel lassen sich jedoch sofort auf die Invarianten ihrer Orthogonal-F_2 zurückführen. Man erhält daher nichts wesentlich Neues. Anders bei den Büscheln.

Führt man Büschelkoordinaten in Analogie zu den Geradenkoordinaten im hyperbolischen Raum ein, dann gelangt man noch zu einer Anzahl weiterer Invarianten. Die Koordinaten eines Büschels definieren wir in der üblichen Weise durch

$$a_{ij} = x_i y_j - x_j y_i$$

mit dem Zusatz, daß

$$2\,(a_{01}a_{23} + a_{02}a_{31} + a_{03}a_{12}) = 0$$

ist.[8]) Als erste invariante Eigenschaft zweier Büschel finden wir die, eine F_2 gemeinsam zu haben. Führt man

$$\mathfrak{a}\colon\ a_{01},\ a_{02},\ a_{03}, \qquad \underline{\mathfrak{a}}\colon\ a_{23},\ a_{31},\ a_{12}$$

ein, dann lautet die Bedingung

$$\mathfrak{a}\,\underline{\mathfrak{a}}^* + \underline{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{a}^* = 0.$$

Die Koordinaten eines Büschels, das zu einem gegebenen konjugiert ist, ergeben sich ohne weiteres zu

$$a_{23},\ a_{31},\ a_{12},\ -a_{01},\ -a_{02},\ -a_{03}.$$

Daraus folgt, daß, wenn das eine von zwei Büscheln eine F_2 mit dem zu dem anderen konjugierten Büschel gemeinsam hat, die Bedingung

$$(14)\quad -a_{01}a_{01}^* - a_{02}a_{02}^* - a_{03}a_{03}^* + a_{23}a_{23}^* + a_{31}a_{31}^* + a_{12}a_{12}^* = 0$$

bestehen muß. (14) stellt eine weitere Invariante dar.

Außer diesen invarianten Lagebeziehungen besitzen zwei Büschel aber auch noch ein numerisches Invariantenpaar, das dem Winkelpaar bzw. den beiden kürzesten Entfernungen zweier Geraden im hyperbolischen Raum entspricht. Diese kürzeste Entfernung herrscht zwischen den Schnittpunkten des gemeinsamen Lotes mit den beiden Geraden. Von diesen Loten existieren bei sich nicht schneidenden Geraden, welche keine Tangenten[9]) sind, stets zwei. Den beiden genannten Schnittpunkten des einen Lotes entspricht im ξ-Raum in jedem Büschel eine F_2, etwa $\mathfrak{x}^{\mathrm{I}}$ und $\mathfrak{x}^{\mathrm{II}}$. Die beiden F_2 haben die Eigenschaft, ihrerseits ein Büschel zu bestimmen, das zu jedem der gegebenen Büschel konjugiert ist. Unter dem Winkel von $\mathfrak{x}^{\mathrm{I}}$ und $\mathfrak{x}^{\mathrm{II}}$ wollen wir auch im ξ-Raum den einen der beiden Winkel der gegebenen

8) Die 6 Koordinaten eines F_2-Büschels lauten somit $a_{01}, a_{02}, a_{03}, a_{23}, a_{31}, a_{12}$.

9) Gemeint sind Tangenten an die durch (12) gegebene absolute F_2.

Büschel verstehen. Für den anderen Winkel gilt das Entsprechende. Nach COOLIDGE[10]) lautet die Gleichung des Winkelpaares

$$(15)\quad (a\,a - \underline{a}\,\underline{a})(a^*\,a^* - \underline{a}^*\,\underline{a}^*)\sin^4\varphi + [(a\,a^* - \underline{a}\,\underline{a}^*)^2 + (a\,a^* + a^*\,\underline{a})^2 - (a\,a - \underline{a}\,\underline{a})(a^*\,a^* - \underline{a}^*\,\underline{a}^*)]\sin^2\varphi - (a\,\underline{a}^* + a^*\,\underline{a})^2 = 0.$$

Sind die Winkel der beiden Büschel gleich Null, so gilt

$$(a\,\underline{a}^* + a^*\,\underline{a})^2 = (a\,a^* - \underline{a}\,\underline{a}^*)^2 + (a\,\underline{a}^* + a^*\,\underline{a})^2 - (a\,a - \underline{a}\,\underline{a})\,(a^*\,a^* - \underline{a}^*\,\underline{a}^*) = 0.$$

Solche Büschel wollen wir parallel nennen. Sind hingegen die beiden Winkel identisch, ohne Null zu sein, dann sollen die Büschel parataktisch heißen. Da nun der Winkel eine Invariante zweier Büschel ist, stellt natürlich auch die Eigenschaft, parallel oder parataktisch zu sein, eine invariante Beziehung dar.

Wie schon in (2) angekündigt wurde, sollen jetzt noch einige Zusammenhänge geklärt werden, die zwischen den Invarianten von vier Punkten, zwei Büscheln und zwei Kreisen oder den entsprechenden Elementen des ξ-Raumes bestehen.

Gleich zu Anfang sei auf die Tatsache hingewiesen, daß man auch, ohne über die komplexen z-Koordinaten zu gehen, nur mittels der tetrazyklischen Koordinaten zu den Invarianten von vier Kongruenzgeraden gelangt.

Gegeben seien z. B. vier ausgeartete F_2: $\mathfrak{x}^{\mathrm{I}}$, $\mathfrak{x}^{\mathrm{II}}$, $\mathfrak{x}^{\mathrm{III}}$, $\mathfrak{x}^{\mathrm{IV}}$ mit der Bedingung

$$\mathfrak{x}^{\mathrm{I}}\,\underline{\mathfrak{x}}^{\mathrm{I}} = \mathfrak{x}^{\mathrm{II}}\,\underline{\mathfrak{x}}^{\mathrm{II}} = \mathfrak{x}^{\mathrm{III}}\,\underline{\mathfrak{x}}^{\mathrm{III}} = \mathfrak{x}^{\mathrm{IV}}\,\underline{\mathfrak{x}}^{\mathrm{IV}} = 0.$$

Dabei sind die Koordinaten von $\mathfrak{x}^i$ bis auf einen willkürlichen Faktor bestimmt. Die beiden einzigen Invarianten, die sich aus diesen vier Größen bilden lassen, sind

$$(16)\qquad G_1 = \frac{(\underline{\mathfrak{x}}^{\mathrm{I}}\,\mathfrak{x}^{\mathrm{III}})\,(\underline{\mathfrak{x}}^{\mathrm{II}}\,\mathfrak{x}^{\mathrm{IV}})}{(\underline{\mathfrak{x}}^{\mathrm{I}}\,\mathfrak{x}^{\mathrm{IV}})\,(\underline{\mathfrak{x}}^{\mathrm{II}}\,\mathfrak{x}^{\mathrm{III}})}, \qquad G_2 = \frac{(\underline{\mathfrak{x}}^{\mathrm{I}}\,\mathfrak{x}^{\mathrm{IV}})\,(\underline{\mathfrak{x}}^{\mathrm{II}}\,\mathfrak{x}^{\mathrm{III}})}{(\underline{\mathfrak{x}}^{\mathrm{I}}\,\mathfrak{x}^{\mathrm{II}})\,(\underline{\mathfrak{x}}^{\mathrm{III}}\,\mathfrak{x}^{\mathrm{IV}})}.$$

Die Invarianten (16) lassen sich ohne weiteres durch Büschelkoordinaten und Büschelinvarianten ausdrücken. Im allgemeinen gilt

$$(17)\quad \sum a_{ij}^2 = \sum (x_i\,y_j - x_j\,y_i)^2 = -(\mathfrak{x}\,\mathfrak{x})\,(\mathfrak{y}\,\mathfrak{y}) + (\mathfrak{x}\,\mathfrak{y})^2 = (a\,a - \underline{a}\,\underline{a}).$$

Führen wir in (17) die Bedingung

$$\mathfrak{x}\,\mathfrak{x} = \mathfrak{y}\,\mathfrak{y} = 0$$

ein, dann besteht die Identität

$$(18)\qquad \sum a_{ij}^2 = (\mathfrak{x}\,\mathfrak{y})^2.$$

10) J. L. Coolidge, *The Elements of Non-Euclidean Geometry*. Oxford 1909 und 1927, S. 113.

Unter Benutzung von (18) wird aus (16)

$$G_1 = \sqrt{\frac{\sum a_{ij}^{\mathrm{I}\,2} \sum a_{ij}^{\mathrm{II}\,2}}{\sum a_{ij}^{\mathrm{III}\,2} \sum a_{ij}^{\mathrm{IV}\,2}}}, \quad G_2 = \sqrt{\frac{\sum a_{ij}^{\mathrm{III}\,2} \sum a_{ij}^{\mathrm{IV}\,2}}{\sum a_{ij}^{\mathrm{V}\,2} \sum a_{ij}^{\mathrm{VI}\,2}}},$$

wobei

$$(\mathfrak{x}^{\mathrm{I}}\mathfrak{x}^{\mathrm{III}}) = \sum a_{ij}^{\mathrm{I}\,2}, \quad (\mathfrak{x}^{\mathrm{I}}\mathfrak{x}^{\mathrm{IV}}) = \sum a_{ij}^{\mathrm{II}2},$$
$$(\mathfrak{x}^{\mathrm{II}}\mathfrak{x}^{\mathrm{IV}}) = \sum a_{ij}^{\mathrm{III}2}, \quad (\mathfrak{x}^{\mathrm{II}}\mathfrak{x}^{\mathrm{III}}) = \sum a_{ij}^{\mathrm{IV}2},$$
$$(\mathfrak{x}^{\mathrm{I}}\mathfrak{x}^{\mathrm{II}}) = \sum a_{ij}^{\mathrm{V}2}, \quad (\mathfrak{x}^{\mathrm{III}}\mathfrak{x}^{\mathrm{IV}}) = \sum a_{ij}^{\mathrm{VI}2}$$

ist. Die Invariante zweier Büschel ist aber, wie eben abgeleitet wurde, ihr Winkelpaar φ_1, φ_2. Wird $\sin^2\varphi_1 = A_1$ und $\sin^2\varphi_2 = A_2$ gesetzt, so ergibt sich

$$A_1 A_2 = \frac{-(\mathfrak{a}^{\mathrm{I}}\underline{\mathfrak{a}}^{\mathrm{II}} + \mathfrak{a}^{\mathrm{II}}\underline{\mathfrak{a}}^{\mathrm{I}})^2}{(\mathfrak{a}^{\mathrm{I}}\underline{\mathfrak{a}}^{\mathrm{I}} - \underline{\mathfrak{a}}^{\mathrm{I}}\mathfrak{a}^{\mathrm{I}})(\mathfrak{a}^{\mathrm{II}}\underline{\mathfrak{a}}^{\mathrm{II}} - \underline{\mathfrak{a}}^{\mathrm{II}}\mathfrak{a}^{\mathrm{II}})}.$$

Hierdurch nimmt (16) die Form

$$G_1 = \sqrt{\frac{(\mathfrak{a}^{\mathrm{I}}\underline{\mathfrak{a}}^{\mathrm{II}} + \mathfrak{a}^{\mathrm{II}}\underline{\mathfrak{a}}^{\mathrm{I}})^2 B_1 B_2}{(\mathfrak{a}^{\mathrm{III}}\underline{\mathfrak{a}}^{\mathrm{IV}} + \mathfrak{a}^{\mathrm{IV}}\underline{\mathfrak{a}}^{\mathrm{III}})^2 A_1 A_2}}, \quad G_2 = \sqrt{\frac{(\mathfrak{a}^{\mathrm{III}}\underline{\mathfrak{a}}^{\mathrm{IV}} + \mathfrak{a}^{\mathrm{IV}}\underline{\mathfrak{a}}^{\mathrm{III}})^2 C_1 C_2}{(\mathfrak{a}^{\mathrm{V}}\underline{\mathfrak{a}}^{\mathrm{VI}} + \mathfrak{a}^{\mathrm{VI}}\underline{\mathfrak{a}}^{\mathrm{V}})^2 B_1 B_2}}$$

an. Auf diese Weise ist ein Zusammenhang zwischen den Invarianten G_1 und G_2 und den Büschelinvarianten hergestellt; jetzt gilt es nur noch eine Verbindung herzustellen zwischen G_1, G_2 und der komplexen Invarianten

$$D = \frac{(Z^{\mathrm{III}} - Z^{\mathrm{I}})(Z^{\mathrm{IV}} - Z^{\mathrm{II}})}{(Z^{\mathrm{III}} - Z^{\mathrm{II}})(Z^{\mathrm{IV}} - Z^{\mathrm{I}})}. \tag{19}$$

(19) enthält als reelle Bestandteile $|D|$ und $\arg D$. Diese beiden reellen Invarianten lassen sich ohne weiteres in den tetrazyklischen Koordinaten der vier Punkte $\mathfrak{x}^{\mathrm{I}}$, $\mathfrak{x}^{\mathrm{II}}$, $\mathfrak{x}^{\mathrm{III}}$, $\mathfrak{x}^{\mathrm{IV}}$ ausdrücken. Es mögen z. B. Z^{I} und Z^{III} die kartesischen Koordinaten ν_1, μ_1 bzw. ν_3, μ_3 haben, dann ergibt sich

$$|Z^{\mathrm{III}} - Z^{\mathrm{I}}| = \sqrt{\nu_1^2 + \mu_1^2 + \nu_3^2 + \mu_3^2 - 2\nu_1\nu_3 - 2\mu_1\mu_3}.$$

Nun bestehen aber auf Grund der stereographischen Projektion die Beziehungen

$$x_0 = \varrho\,\frac{1 + \nu^2 + \mu^2}{2}, \quad x_2 = \varrho\,\nu,$$

$$x_1 = \varrho\,\frac{1 - \nu^2 - \mu^2}{2}, \quad x_3 = \varrho\,\mu,$$

unter deren Benutzung

$$-x_{01}x_{03} + x_{11}x_{13} + x_{21}x_{23} + x_{33}x_{31}$$
$$= -\tfrac{1}{2}(\nu_3^2 + \mu_3^2 + \nu_1^2 + \mu_1^2 - 2\nu_1\nu_3 - 2\mu_1\mu_3)\,\varrho^2$$

folgt. Demnach wird

$$|D| = \sqrt{\frac{(\mathfrak{x}^{\mathrm{III}}\underline{\mathfrak{x}}^{\mathrm{I}})(\mathfrak{x}^{\mathrm{IV}}\underline{\mathfrak{x}}^{\mathrm{II}})}{(\mathfrak{x}^{\mathrm{III}}\underline{\mathfrak{x}}^{\mathrm{II}})(\mathfrak{x}^{\mathrm{IV}}\underline{\mathfrak{x}}^{\mathrm{I}})}}.$$

Nicht ganz so einfach findet man

$$\sin \arg D = \frac{|\mathfrak{x}^{\mathrm{I}}\,\mathfrak{x}^{\mathrm{II}}\,\mathfrak{x}^{\mathrm{III}}\,\mathfrak{x}^{\mathrm{IV}}|}{2\sqrt{(\mathfrak{x}^{\mathrm{I}}\,\mathfrak{x}^{\mathrm{III}})\,(\mathfrak{x}^{\mathrm{IV}}\,\mathfrak{x}^{\mathrm{II}})\,(\mathfrak{x}^{\mathrm{III}}\,\mathfrak{x}^{\mathrm{II}})\,(\mathfrak{x}^{\mathrm{IV}}\,\mathfrak{x}^{\mathrm{I}})}}.$$

Zu diesem Ergebnis gelangt man folgendermaßen:

Es möge $D = x + iy$ sein, dann ist

$$\sin \arg D = \frac{y}{|D|}.$$

Setzt man wieder für die Z die ν und μ ein, dann erhält man

$$D = \frac{(\nu_3 + i\mu_3 - \nu_1 - i\mu_1)\,(\nu_4 + i\mu_4 - \nu_2 - i\mu_2)}{(\nu_3 + i\mu_3 - \nu_2 - i\mu_2)\,(\nu_4 + i\mu_4 - \nu_1 - i\mu_1)}$$

$$= \varrho^4 \frac{(\nu_3 - \nu_1 + i\mu_3 - i\mu_1)(\nu_4 - \nu_2 + i\mu_4 - i\mu_2)\,(\nu_3 - \nu_2 - i\mu_3 + i\mu_2)\,(\nu_4 - \nu_1 - i\mu_4 + i\mu_1)}{4\,(\mathfrak{x}^{\mathrm{III}}\,\mathfrak{x}^{\mathrm{II}})\,(\mathfrak{x}^{\mathrm{IV}}\,\mathfrak{x}^{\mathrm{I}})}.$$

Durch Ausmultiplizieren der Produkte ergibt sich als Imaginärteil von D

$$\begin{aligned} y = \{ &(\mu_3\nu_4 - \mu_3\nu_2 - \mu_1\nu_4 + \mu_1\nu_2 + \mu_4\nu_3 - \mu_4\nu_1 - \mu_2\nu_3 + \mu_2\nu_1) \\ &(\nu_3\nu_4 - \nu_3\nu_1 + \nu_2\nu_1 - \nu_2\nu_4 - \mu_3\mu_4 - \mu_2\mu_1 + \mu_3\mu_1 + \mu_2\mu_4) \\ + &(-\mu_3\nu_4 + \mu_3\nu_1 + \mu_2\nu_4 - \mu_2\nu_1 - \mu_4\nu_3 + \mu_4\nu_2 + \mu_1\nu_3 - \mu_1\nu_2) \\ &(\nu_3\nu_4 - \nu_3\nu_2 - \nu_1\nu_4 + \nu_1\nu_2 - \mu_3\mu_4 + \mu_3\mu_2 + \mu_1\mu_4 - \mu_1\mu_2)\} \\ &\frac{\varrho^4}{4\,(\mathfrak{x}^{\mathrm{III}}\,\mathfrak{x}^{\mathrm{II}})\,(\mathfrak{x}^{\mathrm{IV}}\,\mathfrak{x}^{\mathrm{I}})}. \end{aligned}$$

Die geschweifte Klammer enthält 128 Produkte zu je vier Faktoren. Es läßt sich leicht nachprüfen, daß sich sämtliche Produkte der Form

$$\nu_i\,\mu_k\,\mu_l\,\mu_m \quad \text{oder} \quad \mu_i\,\nu_k\,\nu_l\,\nu_m \qquad (k \neq l,\ k \neq m,\ l \neq m)$$

und

$$\nu_i^2\,\mu_k\,\mu_m \quad \text{oder} \quad \mu_i^2\,\nu_k\,\nu_m \qquad (k = m)$$

wegheben und nur Produkte der Form

$$\nu_i^2\,\mu_k\,\mu_m \quad \text{oder} \quad \mu_i^2\,\nu_k\,\nu_m \qquad (k \neq m)$$

übrigbleiben. Also wird

$$\begin{aligned} y = \{ &(\nu_1^2 + \mu_1^2)\,(\nu_4\mu_2 - \nu_2\mu_4) - \nu_1[\mu_2\,(\nu_4^2 + \mu_4^2) - \mu_4\,(\nu_2^2 + \mu_2^2)] \\ &\qquad + \mu_1[\nu_2\,(\nu_4^2 + \mu_4^2) - \nu_4\,(\nu_2^2 + \mu_2^2)] \\ &- (\nu_3^2 + \mu_3^2)\,(\nu_4\mu_2 - \nu_2\mu_4) + \nu_3[\mu_2\,(\nu_4^2 + \mu_4^2) - \mu_4\,(\nu_2^2 + \mu_2^2)] \\ &\qquad - \mu_3[\nu_2\,(\nu_4^2 + \mu_4^2) - \nu_4\,(\nu_2^2 + \mu_2^2)] \\ &+ (\nu_3^2 + \mu_3^2)\,(\nu_1\mu_2 - \nu_2\mu_1) - \nu_3[\mu_2\,(\nu_1^2 + \mu_1^2) - \mu_1\,(\nu_2^2 + \mu_2^2)] \\ &\qquad + \mu_3[\nu_2\,(\nu_1^2 + \mu_1^2) - \nu_1\,(\nu_2^2 + \mu_2^2)] \\ &- (\nu_3^2 + \mu_3^2)\,(\nu_1\mu_4 - \nu_4\mu_1) + \nu_3[\mu_4\,(\nu_1^2 + \mu_1^2) - \mu_1\,(\nu_4^2 + \mu_4^2)] \\ &\qquad - \mu_3[\nu_4\,(\nu_1^2 + \mu_1^2) - \nu_1\,(\nu_4^2 + \mu_4^2)]\} \\ &\frac{\varrho^4}{4\,(\mathfrak{x}^{\mathrm{III}}\,\mathfrak{x}^{\mathrm{II}})\,(\mathfrak{x}^{\mathrm{IV}}\,\mathfrak{x}^{\mathrm{I}})}. \end{aligned}$$

Der Ausdruck in der geschweiften Klammer ist aber identisch mit der Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & \nu_3^2+\mu_3^2 & \nu_3 & \mu_3 \\ 1 & \nu_1^2+\mu_1^2 & \nu_1 & \mu_1 \\ 1 & \nu_4^2+\mu_4^2 & \nu_4 & \mu_4 \\ 1 & \nu_2^2+\mu_2^2 & \nu_2 & \mu_2 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} \frac{1+\nu_3^2+\mu_3^2}{2} & \frac{1-\nu_3^2-\mu_3^2}{2} & \nu_3 & \mu_3 \\ \frac{1+\nu_1^2+\mu_1^2}{2} & \frac{1-\nu_1^2-\mu_1^2}{2} & \nu_1 & \mu_1 \\ \frac{1+\nu_4^2+\mu_4^2}{2} & \frac{1-\nu_4^2-\mu_4^2}{2} & \nu_4 & \mu_4 \\ \frac{1+\nu_2^2+\mu_2^2}{2} & \frac{1-\nu_2^2-\mu_2^2}{2} & \nu_2 & \mu_2 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{2}{\varrho^4} \begin{vmatrix} x_{03} & x_{13} & x_{23} & x_{33} \\ x_{01} & x_{11} & x_{21} & x_{31} \\ x_{04} & x_{14} & x_{24} & x_{34} \\ x_{02} & x_{12} & x_{22} & x_{32} \end{vmatrix} = -\frac{2}{\varrho^4} |\mathfrak{x}^{\mathrm{I}}\mathfrak{x}^{\mathrm{II}}\mathfrak{x}^{\mathrm{III}}\mathfrak{x}^{\mathrm{IV}}|.$$

Also hat man

$$\frac{y}{|D|} = \pm \frac{1}{2} \frac{|\mathfrak{x}^{\mathrm{I}}\mathfrak{x}^{\mathrm{II}}\mathfrak{x}^{\mathrm{III}}\mathfrak{x}^{\mathrm{IV}}|}{\sqrt{(\mathfrak{x}^{\mathrm{III}}\mathfrak{x}^{\mathrm{II}})(\mathfrak{x}^{\mathrm{IV}}\mathfrak{x}^{\mathrm{I}})(\mathfrak{x}^{\mathrm{III}}\mathfrak{x}^{\mathrm{I}})(\mathfrak{x}^{\mathrm{IV}}\mathfrak{x}^{\mathrm{II}})}}.$$

Diese Ableitung wurde deshalb durchgeführt, weil sowohl bei Blaschke, Differentialgeometrie III wie bei Coolidge, A treatise on the circle and the sphere, der Faktor $\frac{1}{2}$ fortgelassen ist und bei Coolidge der Ausdruck sich außerdem mit i multipliziert vorfindet.

Wie man sofort sieht, ist D identisch mit $\sqrt{\frac{1}{G_2}}$. Durch eine leichte Rechnung findet man ebenfalls[11])

$$\frac{|\mathfrak{x}^{\mathrm{I}}\mathfrak{x}^{\mathrm{II}}\mathfrak{x}^{\mathrm{III}}\mathfrak{x}^{\mathrm{IV}}|^2}{(\mathfrak{x}^{\mathrm{III}}\mathfrak{x}^{\mathrm{II}})(\mathfrak{x}^{\mathrm{IV}}\mathfrak{x}^{\mathrm{I}})(\mathfrak{x}^{\mathrm{III}}\mathfrak{x}^{\mathrm{I}})(\mathfrak{x}^{\mathrm{IV}}\mathfrak{x}^{\mathrm{II}})} = \frac{(G_1^2 G_2)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{G_2}{G_1}\right)^{\frac{2}{3}} + (G_2^{\frac{1}{2}} G_1)^{\frac{2}{3}} - 2\left\{\left(\frac{G_1}{G_2}\right)^{\frac{1}{3}} + (G_2^2 G_1)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{1}{G_2 G_1^2}\right)^{\frac{1}{3}}\right\}}{G_2^{\frac{2}{3}} G_1^{\frac{1}{3}}}.$$

Hiermit sind die Zusammenhänge zwischen den Invarianten derjenigen Elemente des ξ-Raumes aufgefunden, die eineindeutig auf die Elemente der Möbius-Ebene abbildbar sind.

In den vorangegangenen Zusammenstellungen der Invarianten haben wir stets den Nachweis der Vollständigkeit des Invariantensystems unterdrückt, da er als bekannt aus der Möbius-Geometrie vorausgesetzt wurde. Dieses trifft jedoch nicht mehr zu bei den Elementen des ξ-Raumes, die kein eineindeutiges Analogon in der

11) Vgl. die entsprechenden Formeln der Liniengeometrie bei R. Sauer, *Projektive Liniengeometrie*. Berlin und Leipzig 1937, S. 52—53.

MÖBIUS-Ebene besitzen, nämlich Punkten, beliebigen Ebenen und beliebigen Geraden. Für diese wird der Nachweis der Vollständigkeit daher überall dort erbracht werden, wo er nicht zu trivial ist.

4. Invarianten von Punkten.

a) Ein Punkt.

Ein Punkt besitzt keine numerische Invariante, und für seine Lage gibt es nur die beiden invarianten Möglichkeiten: Inzidenz oder Nichtinzidenz mit einer der beiden Fixgeraden.

b) Zwei Punkte.

Auch diese können mit den Fixgeraden inzidieren. Eine numerische Invariante besitzen sie nur dann, wenn sie beide auf einer Kongruenzgeraden liegen. In diesem Falle bilden sie zusammen mit den Schnittpunkten der Fixgeraden und dieser Kongruenzgeraden ein invariantes Doppelverhältnis. Daß man ein beliebiges Punktepaar durch eine Abbildung der Gruppe in jedes andere beliebige Punktepaar verwandeln kann, geht auch aus (3) hervor.

c) Drei Punkte.

Außer den leicht zu übersehenden möglichen Lagebeziehungen besitzen drei beliebige Punkte zwei wichtige numerische Invarianten. Die Verbindungslinien der drei Punkte O_1, O_2, O_3 bestimmen nämlich drei sich paarweise schneidende Geraden (vgl. Abb. 3). Die Fixgeraden mögen die Ebene der drei Punkte in P_1 und P_2 durchdringen. Dann ist offenbar das Doppelverhältnis der vier Geraden $\overline{O_1O_2}$, $\overline{O_1O_3}$, $\overline{O_1P_1}$, $\overline{O_1P_2}$ invariant. Genau wie in der euklidischen Geometrie kann man nun $-\frac{i}{2}\log(B_1, B_2; P_1, P_2)$ als den Winkel zwischen den beiden Geraden $\overline{O_1O_2}$ und $\overline{O_1O_3}$ bezeichnen. Betrachtet man noch die entsprechenden Winkel an den Punkten O_2 und O_3, so beträgt die Summe der drei Dreieckswinkel genau wie in der euklidischen Geometrie π. Hieraus ergibt sich die Behauptung, daß drei Punkte beliebiger Lage genau zwei Invarianten besitzen. Es sind dies die Winkel an zwei Eckpunkten des genannten Dreiecks. Da das Doppelverhältnis bereits bei der Diskussion der Invarianten zweier F_2 erwähnt wurde, können wir auch noch bei diesen

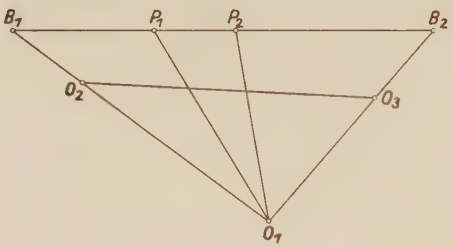

Abb. 3

Invarianten leicht die Analogie in der MÖBIUS-Ebene konstruieren. Da die Verbindungslinien der drei Punkte windschief zu den Fixgeraden sein sollen, bestimmt jede zusammen mit den beiden Fixgeraden eine F_2, und die Summe der Winkel dieser F_2 bzw. in dem Kreisdreieck in der MÖBIUS-Ebene beträgt π. Aus dieser Tatsache können wir zugleich rückwärts gehend einen Lehrsatz für unsere Geometrie gewinnen.

Es seien drei Kreise in der MÖBIUS-Ebene gegeben und zwar so, daß die Winkelsumme in dem einen Kreisdreieck π beträgt. Durch diese drei Kreise und die beiden Fixgeraden im ξ-Raum sind drei F_2 bestimmt und zugleich die drei Kongruenzgeraden, die die MÖBIUS-Ebene in den Eckpunkten des betrachteten Kreisdreiecks durchdringen. Wählen wir einen beliebigen Punkt auf einer dieser Kongruenzgeraden und laufen längs einer Geraden der zweiten Schar der ersten F_2 entlang bis zur zweiten der erwähnten Kongruenzgeraden und von hier aus auf einer Geraden der zweiten Schar der zweiten F_2 bis zur dritten Kongruenzgeraden, so muß die Verbindungslinie dieses Endpunktes mit dem Anfangspunkt auf der ersten Kongruenzgeraden eine Gerade der zweiten Schar der dritten F_2 sein.

Weiterhin ergibt sich noch folgender interessanter Zusammenhang: Da die Winkelsumme in dem Kreisdreieck π betragen soll, müssen die drei Kreise durch einen gemeinsamen Punkt gehen bzw. die entsprechenden F_2 im ξ-Raum sich in einer Kongruenzgeraden schneiden. Diese Kongruenzgerade ist die in Abb. 3 gezeichnete Gerade $\overline{B_1 B_2}$. Es ist nämlich die einzige Kongruenzgerade, die sämtliche Dreiecksseiten schneidet; und diese Dreiecksseiten waren ja die Geraden, die die drei F_2 festlegten.

d) Vier Punkte.

Sehen wir von speziellen Lagen der vier Punkte ab, so besitzen je drei von ihnen natürlich wieder die oben angegebenen zwei Invarianten. Ergänzend hierzu sei noch darauf hingewiesen, daß durch vier Punkte beliebiger Lage auch vier Kongruenzgeraden gehen, deren Invarianten bereits in II, 1 erwähnt sind.

Wie man aus diesen Betrachtungen sieht, lassen sich zu den Invarianten sämtlicher Punktmannigfaltigkeiten analoge Ausdrücke in der MÖBIUS-Geometrie finden bis auf die Invariante zweier Punkte auf einer Kongruenzgeraden, die somit eine charakteristische Invariante des ξ-Raumes ist.

5. Invarianten von Geraden, die untereinander und zu den Fixgeraden windschief sind.

a) Eine Gerade.

Eine solche Gerade hat keinerlei Invariante; da sie sich durch zwei beliebige Punkte festlegen läßt, ergibt sich der Beweis für diese Behauptung aus II, 4 b.

b) Zwei Geraden.

Bevor wir zu den Invarianten dieser beiden Geraden kommen, von denen wir voraussetzen wollen, daß sie mit den Fixgeraden nicht auf ein und derselben F_2 liegen, sei darauf hingewiesen, daß man nicht ohne weiteres, wie es in der euklidischen Geometrie üblich ist, auf Grund der Definition des Winkels zweier sich schneidender Geraden auch den Winkel zwischen einer Geraden und einer Ebene oder zwischen zwei Ebenen definieren kann. Doch soll hierauf erst später eingegangen werden. Etwas einfacher hingegen sieht es mit der Auffindung von Invarianten zweier Geraden der oben genannten Art aus. Zwei derartige Geraden besitzen nämlich zwei Invarianten, die man als deren Winkelpaar bezeichnen kann. Durch die beiden windschiefen Geraden und die Fixgeraden gehen genau zwei Treffgeraden, auf welchen durch die vier windschiefen Geraden je ein invariantes Doppelverhältnis ausgeschnitten wird. (Im Falle des Schneidens der beiden betrachteten Geraden erhalten wir nur noch ein Doppelverhältnis (DV) und $\frac{i}{2}\log DV$ ist gleich dem Winkel der beiden F_2, die durch die beiden Geraden bestimmt sind.) Doch lassen sich die genannten Geraden außer durch die beiden Doppelverhältnisse noch durch die Winkel dreier F_2 bis auf Transformationen der Gruppe festlegen.

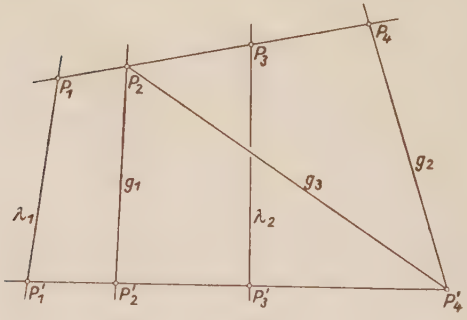

Abb. 4

In Abb. 4 seien λ_1 und λ_2 die beiden Fixgeraden, g_1 und g_2 die beiden windschiefen Geraden und b_1 und b_2 die Treffgeraden. Dann ist durch $\lambda_1, \lambda_2, g_1$ sowie $\lambda_1, \lambda_2, g_2$ je eine F_2 bestimmt, deren Schnittwinkel invariant sind. Verbindet man P_2 mit P_4' und nennt diese Gerade g_3, so ist durch $\lambda_1, \lambda_2, g_3$ eine dritte F_2 desselben Büschels, dem auch die beiden ersten F_2 angehören, bestimmt, deren Winkel mit den beiden

vorhergehenden F_2 wiederum invariant sind, und zwar bildet sie mit der ersten F_2 einen Winkel, der durch das Doppelverhältnis $(P_1, P_2; P_3, P_4)$ und mit der zweiten F_2 einen, der durch das Doppelverhältnis $(P_1', P_2'; P_3', P_4')$ dargestellt wird. Sind also umgekehrt drei F_2 eines Büschels gegeben und nimmt man den Punkt P_2 auf einer ihrer gemeinsamen Schnittgeraden, z. B. b_1 willkürlich an, so lassen sich daraus eindeutig die Geraden g_1 und g_2 konstruieren.

In Ergänzung hierzu sei noch gesagt, daß zwei windschiefe Geraden, die auf derselben F_2 liegen, auch eine Invariante besitzen. Die windschiefen Geraden und die beiden Fixgeraden haben in diesem Falle eine Regelschar von Treffgeraden gemein, und zwar wird auf allen diesen Treffgeraden durch die genannten windschiefen Geraden dasselbe invariante Doppelverhältnis ausgeschnitten. Auch diese Invariante weist in der MÖBIUS-Geometrie kein Analogon auf.

6. Invarianten beliebiger Geraden.

a) Eine Gerade, die nur eine der Fixgeraden schneidet.[12])

Für diese Gerade existiert keinerlei Invariante, sofern man von der Tatsache des Schneidens mit einer Fixgeraden absieht.

b) Zwei Geraden, von denen jede eine andere Fixgerade schneidet.[12])

$\lambda_1, \lambda_2, g_1, g_2$ besitzen wiederum zwei Kongruenzgeraden b_1 und b_2 als gemeinsame Treffgeraden (vgl. Abb. 5); jedoch nur auf b_2 entsteht ein invariantes Doppelverhältnis. Wir haben hier also nur einen Spezialfall von II, 5 b. Dort bestimmten die beiden Geraden zwei Doppelverhältnisse und zwei nichtausgeartete F_2. Hier entsteht nur ein Doppelverhältnis und eine ausgeartete F_2, nämlich die beiden Ebenen, von denen jede je eine der gegebenen Geraden und die Fixgerade enthält. Auch hier stehen wir somit vor der Tatsache, daß zwei Elemente im ξ-Raum eine Invariante besitzen, die sich nicht in der MÖBIUS-Geometrie ausdrücken läßt. Schneiden sich jedoch die beiden Geraden g_1 und g_2, dann besitzen sie auch im ξ-Raum keine Invariante mehr.

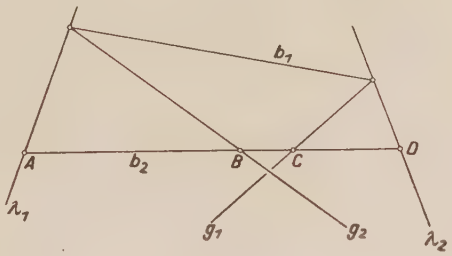

Abb. 5

12) Hierzu sei bemerkt, daß solche Geraden niemals reell sein können.

c) Eine Kongruenzgerade und eine zu den Fixgeraden windschiefe Gerade.

Hier gibt es verschiedene Möglichkeiten für invariante Lagebeziehungen: Die Kongruenzgerade und die windschiefe Gerade können sich schneiden oder zueinander windschief sein. Im ersten Fall gehören sie stets ein und derselben F_2 an, im zweiten nicht. Eine numerische Invariante besitzen die beiden Geraden in keinem Fall, wie man sehr leicht erkennt.

d) Eine Kongruenzgerade und zwei zu den Fixgeraden windschiefe Geraden.

Auch hier existieren mehrere invariante Lagebeziehungen: Die beiden windschiefen Geraden können in einem oder in zwei verschiedenen Punkten oder in gar keinem Punkte die Kongruenzgerade schneiden. Im ersten Fall legen die beiden windschiefen Geraden zwei verschiedene F_2 fest, deren Winkel invariant ist. Eine weitere Invariante besteht nicht. Der zweite Fall bietet noch die Möglichkeiten, daß die beiden windschiefen Geraden auf einer oder auf zwei verschiedenen F_2 liegen. Liegen sie auf einer F_2, so besitzen nur die beiden Schnittpunkte auf der Kongruenzgeraden das in II, 4 c angegebene Doppelverhältnis. Liegen sie jedoch auf zwei verschiedenen F_2 und schneiden sich außerdem, dann steht das eben genannte Doppelverhältnis in der in II, 2 erwähnten Weise in Beziehung zu dem Winkel der beiden F_2, die durch die windschiefen Geraden bestimmt werden. Schneiden sich diese zu den Fixgeraden windschiefen Geraden aber nicht, dann besitzen sie zusammen mit der Kongruenzgeraden die in II, 5 b aufgeführten beiden Invarianten. Im letzten Fall endlich besitzen die drei Geraden, vorausgesetzt, daß die windschiefen Geraden nicht auf derselben F_2 liegen, drei numerische Invarianten. Zwei numerische Invarianten besitzen die beiden windschiefen Geraden ohnehin. Durch die Kongruenzgerade wird aber nun eine F_2 desselben Büschels bestimmt, das durch die windschiefen Geraden festgelegt wurde. Der Winkel dieser F_2 mit der einen der beiden anderen F_2 des Büschels bildet die dritte Invariante.

7. Invarianten von Punkten und Geraden.

a) Ein Punkt und eine zu den Fixgeraden windschiefe Gerade.

Der Punkt kann auf der windschiefen Geraden liegen oder außerhalb von ihr.[13]) Die letzte Möglichkeit ist hier nur von Interesse. Doch auch

13) Die Lage des Punktes auf einer der beiden Fixgeraden wird nicht erwähnt, weil sie uninteressant ist.

hier ergeben sich noch zwei Fälle: Inzidenz oder Nichtinzidenz des Punktes mit der durch die windschiefe Gerade bestimmten F_2. Liegt der Punkt auf der genannten F_2, so geht durch diesen eine zweite zu der ersten und zu den Fixgeraden windschiefe Gerade, die ebenfalls auf dieser F_2 liegt und mit der ersten die in II, 5 b erläuterte Invariante besitzt. Im zweiten Fall besteht keinerlei numerische Invariante, denn diese beiden Elemente lassen sich durch eine Kollineation unserer Gruppe in zwei beliebige andere Elemente derselben Art überführen.

b) Ein Punkt und eine Kongruenzgerade.

Außer den leicht zu übersehenden invarianten Lagebeziehungen weisen diese beiden Elemente keinerlei numerische Invarianten auf.

c) Zwei Punkte und eine Kongruenzgerade.

Die Punkte können einzeln oder gemeinsam liegen auf der Kongruenzgeraden, auf den durch die Kongruenzgeraden bestimmten Ebenenpaaren und auf den Fixgeraden. Sie haben außerdem noch die Möglichkeit, auf einer Geraden zu liegen, die die Kongruenzgerade schneidet oder nicht schneidet. Schneidet diese Verbindungsgerade die Kongruenzgerade nicht und liegt auch keiner der beiden Punkte auf einer der durch die Kongruenzgerade und Fixgeraden bestimmten Ebenen, dann besitzen die drei Elemente eine numerische Invariante. Es ist nämlich durch jeden Punkt und die Kongruenzgerade eine Ebene bestimmt. Diese beiden Ebenen bilden zusammen mit dem Ebenenpaar durch die Kongruenzgeraden ein invariantes Doppelverhältnis, welches ebenfalls nicht in der Möbius-Ebene darstellbar ist. Daß diese die einzige numerische Invariante ist, läßt sich folgendermaßen zeigen. Nehmen wir zwei Punkte A und B im ξ-Raum fest an und auf der dadurch bestimmten Geraden, welche keine Kongruenzgerade sein möge, zwei weitere Punkte C und D, die zusammen mit den ersten beiden das erwähnte Doppelverhältnis bilden, dann läßt sich hieraus eindeutig die zugehörige Kongruenzgerade konstruieren (vgl. Abb. 6). Es bestimmen nämlich C und λ_1 die eine Ebene, D und λ_2 die zweite Ebene, deren Schnittgerade die gesuchte Kongruenzgerade ist. Liegen A und B von vorneherein auf einer Kongruenzgeraden, dann müssen C und D die Schnittpunkte dieser Geraden mit den Fixgeraden sein, und durch jede andere Kongruenzgerade lassen sich dann vier Ebenen legen, die die erste in dem angegebenen Doppelverhältnis schneiden.

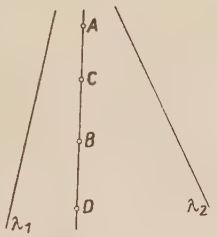

Abb. 6

d) Ein Punkt und eine Ebene.

Auch diese besitzen eine Invariante, welche kein Analogon in der MÖBIUS-Geometrie aufweist. Mit dem Punkt P und der Ebene $\mathfrak{E}$ inzidiert nämlich je eine Kongruenzgerade. Die erste Kongruenzgerade hat mit der Ebene $\mathfrak{E}$ einen Punkt P_1 gemein, und die zweite Kongruenzgerade hat mit dem Punkt P eine Ebene $\mathfrak{E}_1$ gemein. Sowohl durch P und P_1 wie durch $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}_1$ läßt sich die in II, 4b erwähnte Invariante bilden, und zwar ist das Doppelverhältnis der Punkte mit dem der Ebenen identisch.

Im Anschluß an den Gedankengang von II, 5 b soll nun bewiesen werden, daß Winkel zwischen Gerade und Ebene sowie zwischen Ebenen untereinander sich nicht definieren lassen. In der euklidischen Geometrie führt man diese Winkel auf die Winkel zweier sich schneidender Geraden zurück. Betrachtet man also eine Gerade g und eine Ebene $\mathfrak{E}$, so muß man erst von einem beliebigen Punkt der Geraden das Lot auf die Ebene $\mathfrak{E}$ fällen und seinen Fußpunkt mit dem Schnittpunkt von g und $\mathfrak{E}$ verbinden. Der Winkel dieser Verbindungsgeraden mit g ist dann der Winkel zwischen g und $\mathfrak{E}$. Wir wollen nun beweisen, daß man zwar in einem Punkte einer Geraden eine senkrechte Ebene errichten, nicht aber von jedem Punkte ein Lot auf eine Ebene fällen kann.

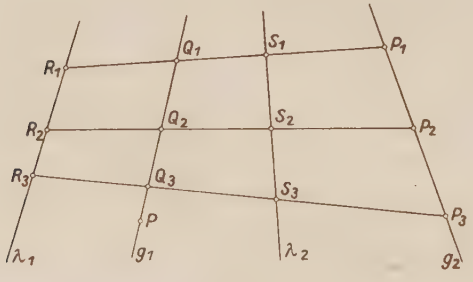

Abb. 7

In Abb. 7 seien λ_1 und λ_2 die beiden Fixgeraden, P der Punkt, durch den die zu g_1 senkrechte Ebene gehen soll; diese Ebene muß die Gesamtheit der Geraden enthalten, die zu g_1 senkrecht in P sind. Alle diese Geraden wiederum müssen in Ebenen liegen, die durch g_1 gehen. In jeder dieser Ebenen liegt genau eine Kongruenzgerade R_iS_i. Die zu R_i, Q_i, S_i vierten harmonischen Punkte, welche ebenfalls alle auf einer Geraden g_2 liegen, mögen P_i heißen; g_1 und g_2 liegen somit auf ein und derselben F_2, und die Geraden P_iP sind sämtlich senkrecht zu g_1 und erfüllen die zu g_1 senkrechte Ebene.

Sind umgekehrt irgendein Punkt Q_1 und eine Ebene $\mathfrak{E}$ gegeben, auf die wir von Q_1 aus das Lot fällen wollen, dann legen wir durch Q_1 die Kongruenzgerade R_1S_1, welche die Ebene $\mathfrak{E}$ in dem Punkte P_1 schneidet. Nun sieht man, daß das Doppelverhältnis von R_1, Q_1, S_1, P_1 nicht gleich -1 zu sein braucht, was der Fall sein müßte, wenn über-

haupt von Q_1 ein Lot auf $\mathfrak{E}$ zu fällen wäre. Ist das Doppelverhältnis aber zufällig gleich -1, dann gibt es durch Q_1 unendlich viele Lote, da man sowohl durch Q_1 wie durch P_1 in $\mathfrak{E}$ unendlich viele Geraden ziehen kann, die paarweise einer F_2 angehören und daher auf allen Kongruenzgeraden, welche Geraden der Regelschar sind, harmonische Punkte ausschneiden. Die Fußpunkte dieser Lote liegen natürlich alle auf der Kongruenzgeraden in der Ebene $\mathfrak{E}$. Da man das von einem Punkte auf eine Ebene gefällte Lot nicht definieren kann, ist somit auch die Unmöglichkeit der Definition eines Winkels zwischen Gerade und Ebene erwiesen.

Es ist im Anschluß hieran vielleicht von Interesse, festzustellen, daß man auch in einer Ebene nur in Punkten der in dieser Ebene liegenden Kongruenzgeraden g Lote errichten kann. Und zwar liegt die Gesamtheit der Lote in den Punkten der Kongruenzgeraden wiederum in einer Ebene. Zu diesem Ergebnis gelangt man folgendermaßen: Gesucht wird die Gesamtheit aller der Punkte auf sämtlichen Kongruenzgeraden, die zusammen mit den Schnittpunkten auf den Fixgeraden und dem jeweiligen Durchstoßpunkt der Kongruenzgeraden durch die Ebene $\mathfrak{E}$ ein harmonisches Quadrupel ergeben. Jede Verbindungslinie zwischen diesen gesuchten Punkten und einem Punkt der Kongruenzgeraden in $\mathfrak{E}$ ist dann ein Lot auf $\mathfrak{E}$. Die Gesamtheit dieser gesuchten Punkte liegt offenbar in der Ebene, die die vierte harmonische Ebene zu $\mathfrak{E}, (g, \lambda_1), (g, \lambda_2)$ ist. Dabei soll unter (g, λ_i) die Ebene verstanden sein, die durch diese beiden Geraden g und λ_i festgelegt wird.

III. Differentialgeometrische Invarianten.

1. Invarianten von Flächenscharen.

Wie es in der nichteuklidischen Differentialgeometrie üblich ist, werden wir auch hier die sogenannten normierten Koordinaten benutzen. Sie ergeben sich aus den üblichen Koordinaten durch die Gleichung

$$\hat{\mathfrak{x}} = \frac{\mathfrak{x}}{\sqrt{\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}}}, \qquad \hat{\mathfrak{x}}\,\hat{\mathfrak{x}} = 1.$$

Der Einfachheit halber soll das Normierungszeichen $\wedge$ wieder fortgelassen werden.

Bei der Diskussion der differentialgeometrischen Invarianten der einparametrigen F_2-Scharen brauchen wir uns nur auf solche Funktionen zu beschränken, die gegenüber den Parametertransformationen $f^* = f(t)$, wobei $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(t)$ ist, invariant bleiben. Diese Invarianten geben uns die Möglichkeit, noch einige Aussagen über die Regelflächen

beliebigen Grades zu machen, die durch die beiden windschiefen Geraden gehen. Im wesentlichen soll jedoch die Diskussion der Flächeninvarianten dazu dienen, die Invarianten von Raumkurven zu finden.[14])

Ebenso wie man in der MÖBIUS-Geometrie den Kreis als Grundelement und die Kurven als Hüllkurven von Kreisscharen betrachtet, wollen wir im ξ-Raum die Regelflächen als Hüllflächen der durch die beiden windschiefen Geraden gehenden F_2-Schar darstellen. Bei der Auffindung der differentialgeometrischen Invarianten werden wir selbstverständlich an die schon vorhandenen Formeln der hyperbolischen und MÖBIUS-Geometrie anknüpfen.

Die Invariante zweier F_2 war $\cos^2 \varphi$, wenn φ ihr Winkel ist. Daraus ergibt sich der absolute Betrag des Winkels der beiden Flächen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x} + \dot{\mathfrak{x}}\, dt$ zu $d\sigma = \sqrt{\dot{\mathfrak{x}}\,\dot{\mathfrak{x}}}\, dt$. Es existieren hier drei Fälle:

1. $\dot{\mathfrak{x}}\,\dot{\mathfrak{x}} > 0$, dann ist $d\sigma$ reell;

2. $\dot{\mathfrak{x}}\,\dot{\mathfrak{x}} < 0$, dann ist $d\sigma$ imaginär;

3. $\dot{\mathfrak{x}}\,\dot{\mathfrak{x}} = 0$, hier berühren sich die Flächen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x} + \dot{\mathfrak{x}}\, dt$ längs einer Geraden.

1. $\dot{\mathfrak{x}}\,\dot{\mathfrak{x}} > 0$.

Unter der obigen Bedingung hat $\mathfrak{x}$ mit $\mathfrak{x} + \dot{\mathfrak{x}}\, dt$ zwei reelle oder imaginäre Geraden $\mathfrak{v}$ und $\bar{\mathfrak{v}}$ gemein. Die Fläche $\dot{\mathfrak{x}}(t)$ heiße die Querfläche der Schar, da sie wegen $\mathfrak{x}\,\dot{\mathfrak{x}} = 0$ auf $\mathfrak{x}$ senkrecht steht.

In den weiteren Ausführungen beschränken wir uns auf reelle Flächenscharen, bei denen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x} + \dot{\mathfrak{x}}\, dt$ reelle Schnittgeraden besitzen, und auf die Untergruppe unserer Kollineationen, die jede der beiden Leitgeraden einzeln festlassen; denn jede beliebige Kollineation unserer Gruppe kann man dadurch gewinnen, daß man die Kollineationen der Untergruppe mit einer speziellen der allgemeinen Gruppe zusammensetzt.

$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(t)$ bedeutet in der hyperbolischen Geometrie eine Raumkurve. Ihre Invarianten sind die Krümmung und die Torsion.[15]) Führen wir nach COOLIDGE die F_2 $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{y}$ ein, für welche

$$\mathfrak{x}\,\mathfrak{x} = \mathfrak{t}\,\mathfrak{t} = \mathfrak{z}\,\mathfrak{z} = \mathfrak{y}\,\mathfrak{y} = 1,$$

$$\mathfrak{x}\,\mathfrak{t} = \mathfrak{x}\,\mathfrak{z} = \mathfrak{x}\,\mathfrak{y} = \mathfrak{t}\,\mathfrak{z} = \mathfrak{z}\,\mathfrak{y} = \mathfrak{t}\,\mathfrak{y} = 0$$

gilt[16]), so erhalten wir die FRENETschen Formeln:

$$(20) \qquad \begin{cases} \mathfrak{t} = \mathfrak{x}' = \dfrac{d\mathfrak{x}}{d\sigma}, & \mathfrak{t}' = \varkappa\,\mathfrak{z} - \mathfrak{x}, \\ \mathfrak{y}' = \tau\,\mathfrak{z}, & \mathfrak{z}' = -\varkappa\,\mathfrak{t} - \tau\,\mathfrak{y}. \end{cases}$$

14) In diesem Kapitel wird zugleich eine andere Möglichkeit geboten, elliptische, selbstprojektive lineare Geradensysteme zu behandeln. Vgl. a. a. O.[11]), S. 94ff.

15) Vgl. a. a. O.[10]), S. 189.

16) Da $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{t}$ reell sein sollen, muß entweder $\mathfrak{z}$ oder $\mathfrak{x}$ imaginäre Koordinaten haben.

τ heißt die Torsion, wobei $\tau\, d\sigma$ als Winkel der beiden Schmiegebenen $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{y} + \mathfrak{y}'\, d\sigma$ definiert ist:

$$\tau\, d\sigma = \sqrt{dy\, dy}.$$

Statt der Größen $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{y}$ lassen sich natürlich auch andere wählen, um durch diese die höheren Ableitungen von $\mathfrak{x}$ auszudrücken. THOMSEN[17]) z. B. wählt $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{v}$, $\bar{\mathfrak{v}}$, für welche

$$\mathfrak{v}\,\mathfrak{v} = \mathfrak{v}\,\mathfrak{x} = \mathfrak{v}\,\mathfrak{x}' = 0,$$
$$\bar{\mathfrak{v}}\,\bar{\mathfrak{v}} = \bar{\mathfrak{v}}\,\mathfrak{x} = \bar{\mathfrak{v}}\,\mathfrak{x}' = 0$$

gilt, und durch eine geeignete Normierung läßt sich erreichen, daß

$$\mathfrak{v}\,\bar{\mathfrak{v}} = 1,\ \mathfrak{v}'\,\bar{\mathfrak{v}} = \mathfrak{v}\,\bar{\mathfrak{v}}' = 0$$

wird. Unter Anwendung der Abkürzungen

$$\mathfrak{v}\,\mathfrak{x}'' = c,\quad \bar{\mathfrak{v}}\,\mathfrak{x}'' = \bar{c},\quad -2c\bar{c} = b,\quad \frac{c'}{c} = g,\quad \frac{\bar{c}'}{\bar{c}} = \bar{g}$$

erhält man

$$(21)\qquad \begin{cases} \mathfrak{x}'' = -\mathfrak{x} + \bar{c}\,\mathfrak{v} + c\,\bar{\mathfrak{v}}, \\ \mathfrak{v}' = -c\,\mathfrak{x}', \quad \bar{\mathfrak{v}}' = -\bar{c}\,\mathfrak{x}'. \end{cases}$$

Durch Vergleich folgt

$$\mathfrak{x}'' = -\mathfrak{x} + \bar{c}\,\mathfrak{v} + c\,\bar{\mathfrak{v}} = -\mathfrak{x} + \varkappa\mathfrak{z},$$

also

$$\varkappa\mathfrak{z} = \bar{c}\,\mathfrak{v} + c\,\bar{\mathfrak{v}} = \frac{\mathfrak{z}}{\varrho}.$$

Differenziert man dies nach der Bogenlänge, so erhält man

$$(22)\qquad \begin{cases} \varkappa'\mathfrak{z} + \varkappa\mathfrak{z}' = \bar{c}'\,\mathfrak{v} + \bar{c}\,\mathfrak{v}' + c'\,\bar{\mathfrak{v}} + c\,\bar{\mathfrak{v}}', \\ \varkappa\mathfrak{z}' = \bar{c}'\,\mathfrak{v} - \bar{c}\,c\,\mathfrak{x}' + c'\,\bar{\mathfrak{v}} - c\,\bar{c}\,\mathfrak{x}' - \varkappa'\mathfrak{z}; \end{cases}$$

andererseits ist nach den FRENETschen Formeln

$$\varkappa\mathfrak{z}' = -\varkappa^2\mathfrak{t} - \tau\varkappa\mathfrak{y}.$$

Also ergibt sich

$$(23)\qquad 2\,c\bar{c} = \varkappa^2 = -b.$$

Zu diesem Resultat sind aber noch einige einschränkende Bemerkungen zu machen: Mit den Größen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{y}$ kann man nur solche Kurven im hyperbolischen Raum erfassen, deren Schmiegebene $\mathfrak{y}$ nicht Tangentialebene an die Kugel ist; denn sonst würde entgegen den Voraussetzungen $\mathfrak{y}\,\mathfrak{y} = 0$ sein. Mit den Größen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{v}$, $\bar{\mathfrak{v}}$ hingegen lassen sich auch die eben ausgenommenen Kurven beschreiben. Daraus folgt, daß die Gleichung (23) nur dann gilt, wenn entweder $c = \bar{c} = 0$ oder $c \neq 0$ und $\bar{c} \neq 0$ ist. Aus $\bar{c} = 0$, $c \neq 0$ folgt nämlich $\bar{\mathfrak{v}} = \text{const}$. Das bedeutet, daß der F_2-Schar im ξ-Raum eine Kongruenzgerade

17) A. a. O.[6]), S. 98.

gemeinsam ist bzw. die Kurve im hyperbolischen Raum in einer Tangentialebene an die absolute Kugel liegt. Weiterhin ist zu diesem Fall zu sagen: Die Flächenschar ist auf Grund von (21) vollständig durch $\mathfrak{v}(\sigma)$ gegeben. Außerdem bestehen für sie die Gleichungen

$$\mathfrak{x}'' = -\mathfrak{x} + c\bar{\mathfrak{v}},\ \mathfrak{v}' = -c\mathfrak{x}',\ \mathfrak{v}\bar{\mathfrak{v}} = 1.$$

Erteilt man dem Punkt $\bar{\mathfrak{v}}$ in der MÖBIUS-Ebene die Koordinaten $(-1, 1, 0, 0)$, dann kann man die letzten beiden Koordinaten v_2 und v_3 von $\mathfrak{v}$ unmittelbar als die kartesischen ansehen[18]), und so wird die Differentialgeometrie der Kurve in der MÖBIUS-Ebene identisch mit der euklidischen Differentialgeometrie dieser Kurve. Wir haben hier diese Bemerkung eingestreut, da wir schon am Ende von Kapitel I von dieser speziellen Untergruppe unserer Gesamtgruppe gesprochen hatten.

Für $2c\bar{c} = \varkappa^2 = 0$ erhält man im ξ-Raum, wie man leicht auf Grund des Übertragungsprinzipes einsieht, Flächenbüschel. Auf die Deutung für $\varkappa \neq 0$ kommen wir später zurück.

Aus (22) und (23) läßt sich ohne weiteres der Zusammenhang von $g, \bar{g}$ und τ erkennen. Es ist

$$-\tau\mathfrak{y} = \mathfrak{v}(\varrho c' + \varrho'\bar{c}) + \bar{\mathfrak{v}}(\varrho c' + \varrho' c),$$

$$\tau^2 = 2(\varrho\bar{c}' + \varrho'\bar{c})(\varrho c' + \varrho' c)$$

$$= 2(\varrho^2\bar{c}'c' + \varrho\varrho'[\bar{c}'c + \bar{c}c'] + \varrho'^2\bar{c}c).$$

Nach (23) ist $$\varrho^2 = -\frac{1}{b} = \frac{1}{2c\bar{c}};$$

daraus folgt $$2\varrho\varrho' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c\bar{c}}\right)',$$

$$\varrho'^2 = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{c\bar{c}}\right)'^2 \frac{1}{\varrho^2}.$$

Einsetzen in die obige Gleichung liefert

$$\tau^2 = \frac{\bar{c}'c'}{c\bar{c}} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c\bar{c}}\right)'(\bar{c}'c + \bar{c}c') + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{cc}\right)'^2 c^2\bar{c}^2 = g\bar{g} - \frac{1}{4}(g+\bar{g})^2.$$

$\tau\, d\sigma$ ist, wie schon erwähnt, in der hyperbolischen Geometrie als der Winkel zweier Schmiegebenen erklärt. In der MÖBIUS-Ebene bedeutet $\tau\, d\sigma$ den Winkel zweier Orthogonalkreise von zwei Kreisbündeln, und zwar werden diese Kreisbündel genau so, wie die Schmiegebenen der Kurve im hyperbolischen Raum durch je drei Punkte der Kurve festgelegt werden, durch je drei Kreise der Schar $\mathfrak{x}(\sigma)$ bestimmt.

18) Vgl. a. a. O.[6]), S. 74.

Ist also im ξ-Raum die Hüllfläche der Schar $\mathfrak{x}(\sigma)$ gegeben, so ist $\tau\, d\sigma$ gleich dem Winkel der entsprechenden Orthogonal-F_2. Für $\tau = 0$ ergibt sich $g = \bar{g}$. Das bedeutet, daß die beiden Orthogonal-F_2 identisch sind. Die Schar $\mathfrak{x}(\sigma)$ besteht demzufolge aus solchen F_2, welche die Orthogonal-F_2 senkrecht schneiden.

Eine andere Deutung der Differentialinvarianten ergibt sich durch folgende Betrachtung. Gegeben seien die Hüllflächen $\mathfrak{v}$ und $\bar{\mathfrak{v}}$. Wir bilden die beiden Büschel

$$\nu_1 \mathfrak{v} + \nu_2 \mathfrak{v}' \quad \text{und} \quad \mu_1 \bar{\mathfrak{v}} + \mu_1 \bar{\mathfrak{v}}'.$$

Die F_2 der konjugierten Mannigfaltigkeit mögen $\mathfrak{w}$ und $\bar{\mathfrak{w}}$ lauten. Diese Flächen gehören je einem Schmiegbüschel der beiden Hüllflächen $\mathfrak{v}$ und $\bar{\mathfrak{v}}$ an; denn für sie gilt

$$\mathfrak{w}\,\mathfrak{v} = 0, \quad \bar{\mathfrak{w}}\,\bar{\mathfrak{v}} = 0,$$
$$\mathfrak{w}\,\mathfrak{v}' = 0, \quad \bar{\mathfrak{w}}\,\bar{\mathfrak{v}}' = 0$$

und außerdem

$$\mathfrak{w} = \alpha\mathfrak{x} + \beta\mathfrak{x}' + \gamma\mathfrak{v} + \delta\bar{\mathfrak{v}}, \quad \bar{\mathfrak{w}} = \bar{\alpha}\mathfrak{x} + \bar{\beta}\mathfrak{x}' + \bar{\gamma}\mathfrak{v} + \bar{\delta}\bar{\mathfrak{v}}.$$

Durch Benutzung dieser Gleichungen erhält man somit

$$\mathfrak{w} = \alpha\mathfrak{x} + \gamma\mathfrak{v}, \quad \bar{\mathfrak{w}} = \bar{\alpha}\mathfrak{x} + \bar{\delta}\bar{\mathfrak{v}}.$$

Suchen wir nun unter den F_2 dieser beiden Büschel diejenigen, welche $\mathfrak{v}(\sigma)$ und $\bar{\mathfrak{v}}(\sigma)$ am besten approximieren, dann erhalten wir

$$\alpha = \bar{\alpha} = 1, \quad \gamma = \frac{1}{c}, \quad \bar{\delta} = \frac{1}{c}.$$

In diesem Falle ist nämlich $\mathfrak{w}\,\mathfrak{v}'' = \bar{\mathfrak{w}}\,\bar{\mathfrak{v}}'' = 0$. Diese beiden Flächen nennen wir die Schmiegflächen der Hüllfläche längs einer bestimmten Kongruenzgeraden. Wir werden sie zur Unterscheidung von den übrigen Flächen der beiden Büschel mit $\mathfrak{r}$ und $\bar{\mathfrak{r}}$ bezeichnen.

Für den Winkel der beiden Flächen erhalten wir [19])

$$\mathfrak{r}\,\bar{\mathfrak{r}} = \cos\varphi = 1 - \frac{2}{b}, \quad \sin^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{b}.$$

Somit findet die Größe b ihre Deutung als Funktion der beiden Schmieg-F_2. Sollte noch $\mathfrak{w}\,\mathfrak{v}''' = 0$ sein, dann sprechen wir von einem Scheitel der Hüllfläche.

Was die Diskussion spezieller Flächenscharen angeht, so erübrigt sie sich insofern, als diese Flächenscharen durch eine einfache Übersetzungsarbeit unter Benutzung der eben beschriebenen Zusammenhänge der drei Geometrien aus der hyperbolischen bzw. der MÖBIUS-Geometrie gewonnen werden können.

19) Vgl. a. a. O.[6]), S. 102.

2. $\dot{\mathfrak{x}}\ddot{\mathfrak{x}} < 0$.

Dieser Fall bringt nichts wesentlich Neues und läßt sich im Komplexen mit den entwickelten Formeln ohne weiteres behandeln.

3. $\dot{\mathfrak{x}}\ddot{\mathfrak{x}} = 0$.

Wie schon erwähnt, berühren sich hier die Flächen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x} + \dot{\mathfrak{x}}dt$ der Schar. Außerdem ist die Schmieg-F_2 einer jeden Fläche $\mathfrak{v}$ wegen

$$\mathfrak{x}\mathfrak{v} = \mathfrak{x}\mathfrak{v}' = \mathfrak{x}\mathfrak{v}'' = 0$$

$\mathfrak{x}$ selbst, d. h. die Berührungsgerade der genannten Flächen wird durch $\dot{\mathfrak{x}}$ dargestellt. Als vier linear unabhängige Vektoren lassen sich deshalb am besten $\mathfrak{x}$, $\dot{\mathfrak{x}}$, $\ddot{\mathfrak{x}}$, $\dddot{\mathfrak{x}}$ nehmen; es wird

$$|\mathfrak{x}\,\dot{\mathfrak{x}}\,\ddot{\mathfrak{x}}\,\dddot{\mathfrak{x}}|^2 = \begin{vmatrix} \mathfrak{x}\mathfrak{x} & \mathfrak{x}\dot{\mathfrak{x}} & \mathfrak{x}\ddot{\mathfrak{x}} & \mathfrak{x}\dddot{\mathfrak{x}} \\ \dot{\mathfrak{x}}\mathfrak{x} & \dot{\mathfrak{x}}\dot{\mathfrak{x}} & \dot{\mathfrak{x}}\ddot{\mathfrak{x}} & \dot{\mathfrak{x}}\dddot{\mathfrak{x}} \\ \ddot{\mathfrak{x}}\mathfrak{x} & \ddot{\mathfrak{x}}\dot{\mathfrak{x}} & \ddot{\mathfrak{x}}\ddot{\mathfrak{x}} & \ddot{\mathfrak{x}}\dddot{\mathfrak{x}} \\ \dddot{\mathfrak{x}}\mathfrak{x} & \dddot{\mathfrak{x}}\dot{\mathfrak{x}} & \dddot{\mathfrak{x}}\ddot{\mathfrak{x}} & \dddot{\mathfrak{x}}\dddot{\mathfrak{x}} \end{vmatrix} = -(\dot{\mathfrak{x}}\ddot{\mathfrak{x}})^3 \neq 0.$$

Durch $\dot{\mathfrak{x}}\ddot{\mathfrak{x}}$ ist demnach die neue Invariante dieser F_2-Schar gegeben; es ist

$$\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2}\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2} = \frac{d^2\mathfrak{x}}{d\tau^2}\frac{d^2\mathfrak{x}}{d\tau^2}\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^4.$$

Setzt man zur Bestimmung der Bogenlänge $\mathfrak{x}''\mathfrak{x}'' = -1$, so folgt

$$\mathfrak{x}''\mathfrak{x}'' = -1 = \ddot{\mathfrak{x}}\ddot{\mathfrak{x}}\left(\frac{dt}{d\sigma}\right)^4,$$

$$\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^4 = -\ddot{\mathfrak{x}}\ddot{\mathfrak{x}}.$$

Für die Skalarprodukte der höheren Ableitungen entsteht folgende Tabelle:

	$\mathfrak{x}$	$\mathfrak{x}'$	$\mathfrak{x}''$	$\mathfrak{x}'''$
$\mathfrak{x}$	1	0	0	0
$\mathfrak{x}'$	0	0	0	1
$\mathfrak{x}''$	0	0	−1	0
$\mathfrak{x}'''$	0	1	0	a

Man erhält $$\mathfrak{x}'''' = -\mathfrak{x} + \frac{a'}{2}\mathfrak{x}' + a\mathfrak{x}''.$$

Durch die einzige Invariante a ist, wie die Tabelle ergibt, die Fläche $\mathfrak{v}$ bis auf Kollineationen, die die beiden windschiefen Geraden festlassen, bestimmt. Betrachten wir noch die beiden F_2

$$i\mathfrak{x}'' \quad \text{und} \quad i(\mathfrak{x}'' + \mathfrak{x}''' \, d\sigma)$$

und nennen den Winkel zwischen diesen Flächen α, so ergibt sich durch leichte Rechnung

$$d\alpha^2 = -a \, d\sigma^2.$$

$\frac{d\alpha}{d\sigma}$ ist deshalb als eine Art Krümmung der Fläche $\mathfrak{v}$ anzusehen.

Weitere interessante Erwägungen lassen sich an den Fall $\mathfrak{x}\mathfrak{x} = 0$ anknüpfen. $\mathfrak{x}$ läßt sich dann nicht mehr in der üblichen Weise normieren. Wir gelangen jedoch auch hier auf einfache Art zu den gewünschten Vollinvarianten. Betrachten wir z. B. die vier Geraden

$$\mathfrak{x}^{\mathrm{I}} = \nu(t)\,\mathfrak{x}(t), \qquad \mathfrak{x}^{\mathrm{III}} = \nu(t + 2dt)\,\mathfrak{x}(t + 2dt),$$

$$\mathfrak{x}^{\mathrm{II}} = \nu(t + dt)\,\mathfrak{x}(t + dt), \quad \mathfrak{x}^{\mathrm{IV}} = \nu(t + 3dt)\,\mathfrak{x}(t + 3dt),$$

so haben sie, wie wir schon in II, 3 erwähnten, die beiden Vollinvarianten (16), aus welchen sich als weitere Vollinvariante

$$J = \frac{|\,\mathfrak{x}^{\mathrm{I}}\mathfrak{x}^{\mathrm{II}}\mathfrak{x}^{\mathrm{III}}\mathfrak{x}^{\mathrm{IV}}\,|^2}{[(\mathfrak{x}^{\mathrm{I}}\mathfrak{x}^{\mathrm{II}})\,(\mathfrak{x}^{\mathrm{I}}\mathfrak{x}^{\mathrm{III}})\,(\mathfrak{x}^{\mathrm{I}}\mathfrak{x}^{\mathrm{IV}})\,(\mathfrak{x}^{\mathrm{II}}\mathfrak{x}^{\mathrm{III}})\,(\mathfrak{x}^{\mathrm{II}}\mathfrak{x}^{\mathrm{IV}})\,(\mathfrak{x}^{\mathrm{III}}\mathfrak{x}^{\mathrm{IV}})]^{\frac{2}{3}}}$$

bilden läßt. Nach THOMSEN definieren wir die Bogenlänge durch [20])

$$\dot{s}^4 = \frac{|\,\mathfrak{x}\,\dot{\mathfrak{x}}\,\ddot{\mathfrak{x}}\,\dddot{\mathfrak{x}}\,|^2}{(\mathfrak{x}\,\dot{\mathfrak{x}})^4}.$$

Durch eine kurze Rechnung läßt sich nun ein Zusammenhang zwischen der Bogenlänge und der Invariante J finden. Es ist

$$\mathfrak{x}^{\mathrm{II}} = \mathfrak{x} + \dot{\mathfrak{x}}\,dt + \ddot{\mathfrak{x}}\,\frac{(dt)^2}{2} + \cdots,$$

$$\mathfrak{x}^{\mathrm{III}} = \mathfrak{x} + \dot{\mathfrak{x}}\,2dt + \ddot{\mathfrak{x}}\,\frac{(2\,dt)^2}{2} + \cdots,$$

$$\mathfrak{x}^{\mathrm{IV}} = \mathfrak{x} + \dot{\mathfrak{x}}\,3dt + \ddot{\mathfrak{x}}\,\frac{(3\,dt)^2}{2} + \cdots.$$

Aus den vier Kongruenzgeraden bilden wir jetzt die Invariante J. Wir lassen der Einfachheit halber die Umnormierungen fort, da sich ja diese doch fortheben. Dann ergibt sich

20) Die entsprechende Ableitung für die Liniengeometrie findet sich a. a. O.[11]), S. 74.

$$\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}^{II} = -\dot{\mathfrak{x}}\,\dot{\mathfrak{x}}\,\frac{(dt)^2}{2} + \cdots,$$

$$\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}^{III} = -\dot{\mathfrak{x}}\,\dot{\mathfrak{x}}\,\frac{(2\,dt)^2}{2} + \cdots,$$

$$\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}^{IV} = -\dot{\mathfrak{x}}\,\dot{\mathfrak{x}}\,\frac{(3\,dt)^2}{2} + \cdots,$$

$$\mathfrak{x}^{II}\,\mathfrak{x}^{III} = -\dot{\mathfrak{x}}\,\dot{\mathfrak{x}}\,\frac{(dt)^2}{2} + \cdots,$$

$$\mathfrak{x}^{II}\,\mathfrak{x}^{IV} = -\dot{\mathfrak{x}}\,\dot{\mathfrak{x}}\,\frac{(2\,dt)^2}{2} + \cdots,$$

$$\mathfrak{x}^{III}\,\mathfrak{x}^{IV} = -\dot{\mathfrak{x}}\,\dot{\mathfrak{x}}\,\frac{(dt)^2}{2} + \cdots.$$

Wir haben also

$$(\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}^{II})\,(\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}^{III})\,(\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}^{IV})\,(\mathfrak{x}^{II}\,\mathfrak{x}^{III})\,(\mathfrak{x}^{II}\,\mathfrak{x}^{IV})\,(\mathfrak{x}^{III}\,\mathfrak{x}^{IV}) = \frac{9}{4}\,\dot{\mathfrak{x}}\,\dot{\mathfrak{x}}\,(dt)^{12} + \cdots,$$

und die Determinante wird

$$|\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}^{II}\,\mathfrak{x}^{III}\,\mathfrak{x}^{IV}\,|^2 = 81\,(dt)^{12}\,|\,\mathfrak{x}\,\dot{\mathfrak{x}}\,\ddot{\mathfrak{x}}\,\dddot{\mathfrak{x}}\,|^2 + \cdots.$$

Unter Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung erhalten wir

$$J = \frac{81\cdot(dt)^{12}\,|\,\mathfrak{x}\,\dot{\mathfrak{x}}\,\ddot{\mathfrak{x}}\,\dddot{\mathfrak{x}}\,|^2}{\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot(dt)^8\,(\dot{\mathfrak{x}}\,\dot{\mathfrak{x}})^4} = \frac{18^{\frac{4}{3}}\cdot dt^4\,|\,\mathfrak{x}\,\dot{\mathfrak{x}}\,\ddot{\mathfrak{x}}\,\dddot{\mathfrak{x}}\,|^2}{(\dot{\mathfrak{x}}\,\dot{\mathfrak{x}})^4}.$$

Auch in diesem Fall lassen sich durch die Bedingung $\dot{\mathfrak{x}}'\,\dot{\mathfrak{x}}' = 1$ normierte Koordinaten einführen; dann ist nämlich

$$\dot{\mathfrak{x}} = \nu(\sigma)\,\mathfrak{x}', \qquad \dot{\mathfrak{x}}' = \nu'(\sigma)\,\mathfrak{x} + \nu(\sigma)\,\mathfrak{x}',$$

$$\dot{\mathfrak{x}}'\,\dot{\mathfrak{x}}' = 1 = \nu^2\,\mathfrak{x}'\,\mathfrak{x}', \quad \nu = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{x}'\,\mathfrak{x}'}}.$$

Demzufolge erhalten wir das normierte $\mathfrak{x}$ aus dem unnormierten durch

$$\dot{\mathfrak{x}} = \frac{\mathfrak{x}}{\sqrt{\mathfrak{x}'\,\mathfrak{x}'}}.$$

Mit dieser Normierung ergibt sich für die Skalarprodukte der höheren Ableitungen:

	$\mathfrak{x}$	$\mathfrak{x}'$	$\mathfrak{x}''$	$\mathfrak{x}'''$
$\mathfrak{x}$	0	0	-1	0
$\mathfrak{x}'$	0	1	0	$-2a$
$\mathfrak{x}''$	-1	0	$2a$	a
$\mathfrak{x}'''$	0	$-2a$	a'	$4a^2-1$

Es ist $\mathfrak{x}'''' = (8a^2 - a'' - 1)\,\mathfrak{x} - 3a'\,\mathfrak{x}' - 2a\,\mathfrak{x}''.$

Wie man aus der Tabelle ersieht, ist durch die Invariante a wiederum die Fläche $\mathfrak{x}$ bis auf Kollineationen der Gruppe vollständig bestimmt. Diese Invariante ist aus dem Winkel β, den die Flächen $\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{x}' + \mathfrak{x}'' \, d\sigma$ miteinander bilden, zu erklären; es ist

$$\frac{d\beta}{d\sigma} = \sqrt{2a}.$$

Die Flächengeraden $\mathfrak{v}$ werden durch $\mathfrak{x}$ dargestellt; denn $\mathfrak{v}\mathfrak{x} = \mathfrak{v}\mathfrak{x}' = \mathfrak{v}\mathfrak{v} = 0$ hat die Lösung $\mathfrak{x}$. Für die Schmieg-F_2 erhält man aus

$$\mathfrak{x}\mathfrak{v} = \mathfrak{x}\mathfrak{v}' = \mathfrak{x}\mathfrak{v}'' = 0,$$

$$\mathfrak{x}\mathfrak{x} = 1, \quad \mathfrak{x}\mathfrak{x} = 0$$

die Gleichung

$$\mathfrak{x} = \frac{a}{i}\mathfrak{x} + \frac{2a}{i}\mathfrak{x}' + \frac{1}{i}\mathfrak{x}'''.$$

2. Invarianten von Kurven.

Die vorangegangenen Ausführungen können dazu dienen, die Grundlagen zur Diskussion der Kurven im ξ-Raum zu geben. Wir müssen im wesentlichen zwei Arten von Kurven unterscheiden, solche, die Kongruenzgeraden zu Tangenten haben, und solche, die derartige Tangenten nicht besitzen. Die zweiten sind durchweg reguläre Kurven. Ein Kurvenpunkt, der eine Kongruenzgerade zur Tangente besitzt, soll dementsprechend singulär genannt werden. Die Kongruenzgeraden selbst sind also singuläre Kurven, deren Punktfolge sich nicht durch die Möbius-Geometrie erfassen läßt. Sie sind zugleich die einzigen isotropen Kurven, die die Geometrie des ξ-Raumes besitzt. In tetrazyklischen Koordinaten ausgedrückt lautet die Differentialgleichung einer Kongruenzgeraden $\dot{\mathfrak{x}} = 0$, wobei $\mathfrak{x}\mathfrak{x} = 0$ ist. Ist eine beliebige Kurve im ξ-Raum gegeben, so zerlegen wir sie in reguläre und singuläre Kurvenstücke, die wir einzeln ohne Schwierigkeiten diskutieren können.

Der Zusammenhang zwischen der Differentialgeometrie der F_2-Scharen und der der regulären Kurven im ξ-Raum läßt sich folgendermaßen darstellen. Eine F_2-Schar $\mathfrak{x}(\sigma)$ besitzt nach den früheren Ausführungen zwei Hüllflächen $\mathfrak{v}(\sigma)$ und $\bar{\mathfrak{v}}(\sigma)$, welche Regelflächen waren. Wegen

$$\mathfrak{v}\mathfrak{v} = \mathfrak{v}\mathfrak{x} = \bar{\mathfrak{v}}\mathfrak{x} = \bar{\mathfrak{v}}\mathfrak{v} = 0$$

stellen $\mathfrak{v}$ und $\bar{\mathfrak{v}}$ die Kongruenzgeraden dar, die die Hüllflächen mit $\mathfrak{x}$ gemeinsam haben. Durch jeden Punkt dieser Kongruenzgeraden $\mathfrak{v}$ bzw. $\bar{\mathfrak{v}}$ verläuft nun genau eine Gerade der zweiten Schar von $\mathfrak{x}$, die zu den Fixgeraden windschief ist. Durch diese Geraden wird also auf den Hüllflächen $\mathfrak{v}$ und $\bar{\mathfrak{v}}$ ein Richtungsfeld bestimmt, welches die Tan-

genten einer Kurvenschar festlegt. Unterwirft man die beiden Hüllflächen einer gescharten Kollineation, dann bleiben die Hüllflächen fest, weil sämtliche Kongruenzgeraden und damit sämtliche F_2 festbleiben, und das Richtungsfeld wird in sich selbst überführt. Dies hat folgende Bedeutung für unsere Kurventheorie: Jeder Kurve $\mathfrak{v}(\sigma)$ bzw. $\bar{\mathfrak{v}}(\sigma)$ in der MÖBIUS-Geometrie entspricht je eine Mannigfaltigkeit von ∞^1 Kurven im ξ-Raum. Diese können jedoch durch eine gescharte Kollineation ineinander übergeführt werden. Demzufolge wird die Differentialgeometrie der regulären Kurven des ξ-Raumes vollständig durch die Kurventheorie der MÖBIUS-Ebene erfaßt.

Der Deutlichkeit halber wollen wir nun noch beschreiben, wie man aus den Tangenten einer regulären Kurve des ξ-Raumes die entsprechende Kurve der MÖBIUS-Ebene gewinnt. Durch jede Tangente der Kurve ist eine F_2 im ξ-Raum und damit ein Kreis in der MÖBIUS-Ebene bestimmt. Die so durch die Tangenten der Kurve gewonnene F_2-Schar besitzt zwei Hüllflächen, deren Abbild in der MÖBIUS-Ebene die gesuchten Hüllkurven der Kreisschar sind. Fallen diese beiden Hüllflächen in eine zusammen, dann erhalten wir den in III, 1 geschilderten Spezialfall $\mathfrak{x}\dot{\mathfrak{x}} = 0$. Was den Fall $\mathfrak{x}\mathfrak{x} = 0$ anbetrifft, so ist dazu folgendes zu sagen: Da sich eine derartige Kurve in der MÖBIUS-Ebene als Hüllkurve von ∞^1 Kreisscharen darstellen läßt, entspricht dieser MÖBIUS-Kurve im ξ-Raum auch nur eine Hüllfläche ohne ein fest bestimmtes Richtungsfeld auf dieser. Die einzige Invariante dieser MÖBIUS-Kurve beschreibt daher auch nur die Eigenschaft, die sämtlichen regulären Kurven auf der entsprechenden Hüllfläche gemein ist.

Bei der Behandlung der Kurventheorie im ξ-Raum haben wir einen indirekten Weg, der über die Theorie der F_2-Scharen im ξ-Raum führte, eingeschlagen. Die dabei aufgestellten Invarianten hätten sich auch auf direktem Wege finden lassen. Der Vollständigkeit halber wollen wir uns jetzt noch einmal Rechenschaft ablegen über den Grad und die Anzahl der Differentialinvarianten, die notwendig sind, um eine Kurve im ξ-Raum bis auf Kollineationen der Gruppe festzulegen. In III, 1 waren wir zu dem Resultat gekommen, daß die beiden Invarianten zweiten Grades c und $\bar{c}$ diese Bedingung erfüllten. Auf direktem Wege erhalten wir ebenfalls zwei Invarianten zweiten Grades und zwar so: Die Lage zweier Kurventangenten zueinander ist vollständig bestimmt durch den in II, 4 erklärten Winkel der beiden Geraden. Die Lage dreier Kurventangenten zueinander, von denen nicht alle drei in einer Ebene liegen, wird hingegen außer durch die eben genannten Winkel zweier Tangenten zueinander noch durch zwei

weitere Invarianten festgelegt, nämlich die beiden Doppelverhältnisse, die auf den zueinander windschiefen Geraden durch die gemeinsamen Kongruenzgeraden und die Fixgeraden nach II, 5b gebildet werden. Hieraus ergibt sich, daß, falls die Kurven eben sind, die eine dieser beiden Invarianten verschwinden muß. Weiterhin können wir für eine ebene Kurve folgern, daß ihre Tangentialebene zugleich Tangentialebene an die durch sie bestimmte F_2-Schar sein muß. In dieser Tangentialebene liegt nämlich eine Kongruenzgerade, die allen F_2 dieser Schar gemeinsam sein muß. Sie müssen daher Elemente eines ausgearteten F_2-Büschels sein. Dieser Satz läßt sich natürlich auch umkehren: Gehört eine F_2-Schar einem ausgearteten Büschel an, so ist jede Kurve der dadurch bestimmten Kurvenschar eben. Der Beweis ergibt sich daraus, daß die Tangenten der Kurve sich untereinander und mit der gemeinsamen Kongruenzgeraden schneiden, also in einer Ebene liegen müssen. Von einer derartigen F_2-Schar war schon in III, 1 die Rede, wo darauf hingewiesen wurde, daß die Differentialgeometrie der entsprechenden MÖBIUS-Kurve identisch mit der euklidischen Differentialgeometrie dieser Kurve ist. Somit ist die euklidische Differentialgeometrie der ebenen Kurven identisch mit der Differentialgeometrie der regulären ebenen Kurven des ξ-Raumes.

Weiterhin ergibt sich: Nur die Kurven im ξ-Raum, für welche $\dot{\xi}\ddot{\xi} = 0$ gilt, bilden die zweite Schar der Asymptotenlinien auf ihren Hüllflächen. (Die erste Schar der Asymptotenlinien auf den Hüllflächen sind die Kongruenzgeraden.) Soll eine Kurve Asymptotenlinie auf ihrer Hüllfläche sein, so ist es notwendig und hinreichend, daß ihre Schmiegebene zugleich Tangentialebene an die beiden F_2 ist, welche durch die betreffenden beiden Tangenten der Kurve festgelegt sind; denn dann ist diese Tangentialebene auch Tangentialebene der Hüllfläche. Die Tangentialebene an eine solche F_2 ist aber durch die Kongruenzgerade bestimmt, welche durch den betreffenden Kurvenpunkt und durch die Kurventangente geht. Demnach müssen also in einem Kurvenpunkt die Tangentialebenen an beide F_2 in eine zusammenfallen. Das kann aber nur bei solchen regulären F_2 der Fall sein, die sich längs einer Kongruenzgeraden berühren. Diese Tatsache bedeutet, daß für die entsprechende Kurve im ξ-Raum $\dot{\xi}\dot{\xi} = 0$ gelten muß.

3. Invarianten der Büschelgeometrie.

Schon verschiedentlich ist darauf hingewiesen worden, daß man auch das F_2-Büschel als Element der Geometrie des ξ-Raumes auffassen kann. Das Invariantenpaar zweier Büschel, ihr Winkelpaar, ist schon in II, 3 erklärt worden. Jedes Büschel wird durch ein Träger-

geradenpaar $\mathfrak{r}, \mathfrak{v}$ mit $\mathfrak{r}\mathfrak{r} = \mathfrak{v}\mathfrak{v} = 0$ festgelegt; in diesen Geraden schneiden sich sämtliche F_2 des Büschels. Je nachdem nun Scharen, Kongruenzen oder Komplexe von Büscheln gemeint sind, hängen $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{v}$ von einer, zwei oder drei Veränderlichen ab. Im hyperbolischen Raum entsprechen $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{v}$ den Durchstoßpunkten der reziproken Polaren zu der als Punktbüschel gegebenen Geraden durch die absolute Kugel. Die Diskussion der differentialgeometrischen Invarianten der Büschel im ξ-Raum ist demnach identisch mit der Diskussion der Kurven und Netze, die auf der absoluten Kugel von $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{v}$ beschrieben werden. Hierbei werden sich verschiedene schon bekannte Invarianten noch auf eine andere Weise ableiten lassen. So besteht z. B. im hyperbolischen Raum eine spezielle Geradenschar aus den Tangenten einer Kurve. Das Analoge dazu im ξ-Raum ist die Schar der Geradenpaare $\mathfrak{v}$ und $\bar{\mathfrak{v}}$ einer F_2-Schar. Diese Schar von Geradenpaaren ist deswegen sehr speziell, weil $\mathfrak{v}, \bar{\mathfrak{v}}, \mathfrak{v} + \mathfrak{v}'\,d\sigma, \bar{\mathfrak{v}} + \bar{\mathfrak{v}}'\,d\sigma$ wegen

$$\mathfrak{x}\mathfrak{v} = \mathfrak{x}\bar{\mathfrak{v}} = \mathfrak{x}\mathfrak{v}' = \mathfrak{x}\bar{\mathfrak{v}}' = 0$$

sämtlich auf einer F_2 liegen. Dies braucht bei einer Schar von beliebigen Trägergeradenpaaren durchaus nicht der Fall zu sein.

Zum Zwecke der einfachen Diskussion liniengeometrischer Eigenschaften in der Differentialgeometrie hat man die sogenannten STUDYschen dualen Koordinaten eingeführt. Da dieser Schritt nur in der elliptischen und euklidischen Geometrie getan worden ist, soll es die Aufgabe dieses Abschnittes sein, die analogen Formeln für die hyperbolische Geometrie zum Zwecke der Diskussion der Büschelinvarianten im ξ-Raum aufzustellen.[21])

Sind $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{v}$ die Grundgeraden eines F_2-Büschels und sind die sich aus $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{v}$ ergebenden PLÜCKERschen Koordinaten des konjugierten Büschels $a_{01}, a_{02}, a_{03}, a_{23}, a_{31}, a_{12}$, so besteht für letztere bekanntlich die Gleichung

$$a_{01}a_{23} + a_{02}a_{31} + a_{03}a_{12} = 0.$$

Mittels der PLÜCKERschen Koordinaten definieren wir die sogenannten dualen Koordinaten durch die Gleichungen

$$a_{01} + i\,a_{23} = \varrho X_1,$$
$$a_{02} + i\,a_{31} = \varrho X_2,$$
$$a_{03} + i\,a_{12} = \varrho X_3,$$

wobei $i^2 = -1$ und ϱ ein beliebiger reeller Faktor sein sollen. Dem

21) Vgl. W. Blaschke, *Differentialgeometrie der geradlinigen Flächen im elliptischen Raum*. Math. Zeitschrift 15 (1922), S. 308—320.

Faktor ϱ erteilen wir dadurch einen bestimmten Wert, daß wir hier die X_i statt der x_i durch $XX = 1$ normieren. Dabei ist

$$\begin{aligned} XX &= X_1X_1 + X_2X_2 + X_3X_3 \\ &= a_{01}^2 + a_{02}^2 + a_{03}^2 - a_{23}^2 - a_{31}^2 - a_{12}^2 + 2i\,(a_{01}a_{23} + a_{02}a_{31} + a_{03}a_{12}) \\ &= a_{01}^2 + a_{02}^2 + a_{03}^2 - a_{23}^2 - a_{31}^2 - a_{12}^2. \end{aligned}$$

Hierzu soll noch erwähnt werden, daß durch die Normierung zueinander konjugierte Büschel X und X^1 in der Beziehung $XX = -X^1X^1$ zueinander stehen.

Genau so, wie wir bei den F_2-Koordinaten diejenigen Kollineationen betrachtet haben, die $\xi\xi = 0$ invariant lassen, kommen auch hier nur die Kollineationen in Frage, die $XX = 0$ invariant lassen. Denn diese Gleichung bedeutet wieder die Gleichung der absoluten Kugel im hyperbolischen Raum, d. h. die Gleichung aller sie einhüllenden Geraden, und im ξ-Raum die Gleichung aller ausgearteten Büschel, bei denen alle F_2 des Büschels sich in einer Kongruenzgeraden berühren. Der Beweis hierzu ergibt sich leicht auf Grund von II, 3 unter Beachtung von (14).

Die gesuchten Kollineationen der X_i sind die orthogonalen Transformationen der X_i; denn diese allein sind es, die eine Form $XX = 0$ invariant lassen. In unserem Fall handelt es sich nur um die reellen Kollineationen der X_i. Wie man leicht einsieht, bedeuten die reellen orthogonalen Transformationen der X_i reelle Kollineationen der a_{ik} und damit der x_i.

Nach der Theorie der orthogonalen Transformationen sind ihre Invarianten die Skalarprodukte und bei linear abhängigen Vektoren X^i, für welche die Gleichung $\Sigma \alpha_i X^i = 0$ besteht, die Koeffizienten α_i. Benutzen wir die Bezeichnungen

$$\mathfrak{a}: \quad a_{01}, a_{02}, a_{03},$$
$$\underline{\mathfrak{a}}: \quad a_{23}, a_{31}, a_{12},$$

dann lautet das Skalarprodukt

$$XX^1 = \mathfrak{a}\mathfrak{a}^1 - \underline{\mathfrak{a}}\,\underline{\mathfrak{a}}^1 + i\,(\mathfrak{a}\,\underline{\mathfrak{a}}^1 + \underline{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{a}^1).$$

Es steht in einfachem Zusammenhange mit dem in II, 3 erklärten Winkelpaar eines Büschels, dessen Gleichung nach (15)

$$\begin{aligned} &(\mathfrak{a}\mathfrak{a} - \underline{\mathfrak{a}}\,\underline{\mathfrak{a}})\,(\mathfrak{a}^1\mathfrak{a}^1 - \underline{\mathfrak{a}}^1\,\underline{\mathfrak{a}}^1)\sin^4\varphi + [(\mathfrak{a}\mathfrak{a}^1 - \underline{\mathfrak{a}}\,\underline{\mathfrak{a}}^1)^2 + (\mathfrak{a}\,\underline{\mathfrak{a}}^1 + \mathfrak{a}^1\,\underline{\mathfrak{a}})^2 \\ &\quad - (\mathfrak{a}\mathfrak{a} - \underline{\mathfrak{a}}\,\underline{\mathfrak{a}})\,(\mathfrak{a}^1\mathfrak{a}^1 - \underline{\mathfrak{a}}^1\,\underline{\mathfrak{a}}^1)]\sin^2\varphi - (\mathfrak{a}\,\underline{\mathfrak{a}}^1 + \mathfrak{a}^1\,\underline{\mathfrak{a}})^2 = 0 \end{aligned}$$

lautet. Dazu gelten noch die Bedingungen

$$XX = X^1X^1 = 1 = \mathfrak{a}\mathfrak{a} - \underline{\mathfrak{a}}\,\underline{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}^1\mathfrak{a}^1 - \underline{\mathfrak{a}}^1\,\underline{\mathfrak{a}}^1.$$

Sind die Lösungen obiger quadratischer Gleichung $\sin^2\varphi_1$ und $\sin^2\varphi_2$, so ist

$$(\mathfrak{a}\,\underline{\mathfrak{a}}^{\mathrm{I}} + \mathfrak{a}^{\mathrm{I}}\,\underline{\mathfrak{a}})^2 = -\sin^2\varphi_1 \sin^2\varphi_2,$$

$$(\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}^{\mathrm{I}} - \underline{\mathfrak{a}}\,\underline{\mathfrak{a}}^{\mathrm{I}})^2 + (\mathfrak{a}\,\underline{\mathfrak{a}}^{\mathrm{I}} + \mathfrak{a}^{\mathrm{I}}\,\underline{\mathfrak{a}})^2 - 1 = -\sin^2\varphi_1 - \sin^2\varphi_2,$$

$$(\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}^{\mathrm{I}} - \underline{\mathfrak{a}}\,\underline{\mathfrak{a}}^{\mathrm{I}})^2 = \cos^2\varphi_1 \cos^2\varphi_2.$$

Entscheiden wir uns bei $\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}^{\mathrm{I}} - \mathfrak{a}\,\underline{\mathfrak{a}}^{\mathrm{I}}$ für das positive Vorzeichen, dann ist

$$XX^{\mathrm{I}} = \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + i \sin\varphi_1 \sin\varphi_2.$$

Wir setzen $\cos\Phi = XX^{\mathrm{I}}$ und bezeichnen mit Φ den dualen Winkel zwischen den beiden Büscheln. Ist $\Phi = 0$, dann müssen auch φ_1 und φ_2 verschwinden. Ein Büschel ist Normalbüschel zu dem anderen, wenn z. B. $\varphi_1 = 0$ und $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ oder umgekehrt gilt, da auf jeden Fall $XX^{\mathrm{I}} = 0$ sein muß.

Zur Untersuchung der invarianten Ableitungen von X wollen wir auch hier eine Art Bogenlänge einführen. Für dieses Bogenelement erhält man $dS^2 = (\dot{X}\dot{X})\,dt^2$. Um die Tabelle der invarianten Ableitungen aufzustellen, benötigt man einen dritten von X und $X' = \frac{dX}{dS}$ unabhängigen Vektor N. Dieser ist durch die Gleichungen

$$NX = NX' = 0, \quad NN = 1$$

definiert. Dann ergibt sich

	X	X'	N
X'	0	1	0
X''	-1	0	C
N'	0	$-C$	0

$C = c + ic$ ist natürlich ebenfalls eine duale Invariante. Es ist ohne weiteres einzusehen, daß das Büschel N (und ebenso das zu diesem konjugierte) gemeinsames Normalbüschel von X und $X + X'\,dS$ ist. Die beiden F_2, die diese Normalbüschel mit X gemeinsam haben, wollen wir die Kehl-F_2 nennen. $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ mögen diese Kehl-F_2 auf X sein und $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{z}$ auf iX. Durch die Bedingung $XX = 1$ waren bis jetzt nur $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{v}$ normiert. Die Normierung von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{z}$ steht uns demzufolge noch frei. Wir normieren sie durch $\mathfrak{w}\,\mathfrak{w} = \mathfrak{z}\,\mathfrak{z} = \mathfrak{x}\,\mathfrak{x} = 1$.

Da nun durch $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ genau so gut das Büschel festgelegt ist wie durch $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{v}$, läßt sich

$$X = \{\mathfrak{r}\mathfrak{v}\} = \{\mathfrak{x}\mathfrak{y}\}$$

schreiben, wobei wir unter diesem Ausdruck die normierten Büschelkoordinaten X_1, X_2, X_3 verstehen wollen, die durch Kombination der entsprechenden F_2-Koordinaten entstehen. Aus

$$XX \doteq -(\mathfrak{x}\mathfrak{x})(\mathfrak{y}\mathfrak{y}) + (\mathfrak{x}\mathfrak{y})^2 = 1,$$

$$\mathfrak{x}\mathfrak{x} = 1, \quad \mathfrak{x}\mathfrak{y} = 0$$

folgt zwangsläufig $\mathfrak{y}\mathfrak{y} = -1$.

Es ist jetzt möglich, die Invarianten der Büschelschar entweder durch $\mathfrak{r}, \mathfrak{v}, \mathfrak{z}, \mathfrak{w}$ oder durch $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \mathfrak{w}$ auszudrücken. Für das letztere Vektorquadrupel erhalten wir folgendes Schema:

	$\mathfrak{x}$	$\mathfrak{y}$	$\mathfrak{z}$	$\mathfrak{w}$
$\mathfrak{x}$	1	0	0	0
$\mathfrak{y}$	0	-1	0	0
$\mathfrak{z}$	0	0	1	0
$\mathfrak{w}$	0	0	0	1

Um die höheren Ableitungen darstellen zu können, benutzen wir den üblichen Ansatz

$$\dot{\mathfrak{x}} = a_{11}\mathfrak{x} + a_{12}\mathfrak{y} + a_{13}\mathfrak{z} + a_{14}\mathfrak{w},$$

$$\dot{\mathfrak{y}} = a_{21}\mathfrak{x} + a_{22}\mathfrak{y} + a_{23}\mathfrak{z} + a_{24}\mathfrak{w},$$

$$\dot{\mathfrak{z}} = a_{31}\mathfrak{x} + a_{32}\mathfrak{y} + a_{33}\mathfrak{z} + a_{34}\mathfrak{w},$$

$$\dot{\mathfrak{w}} = a_{41}\mathfrak{x} + a_{42}\mathfrak{y} + a_{43}\mathfrak{z} + a_{44}\mathfrak{w}.$$

Man erkennt sogleich, daß $a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{44} = 0$ wird. Außerdem gilt[22])

$$-a_{12} + a_{21} = 0, \quad a_{13} + a_{31} = 0, \quad a_{14} + a_{41} = 0,$$

$$a_{23} - a_{32} = 0, \quad a_{24} - a_{42} = 0, \quad a_{34} + a_{43} = 0.$$

22) Es sei darauf hingewiesen, daß die Koeffizienten $a_{11}, \ldots, a_{44}$ der vier linearen Gleichungen nichts zu tun haben mit den Büschelkoordinaten $a_{01}, \ldots$.

Schließlich wollen wir noch die Identitäten

$$X = i\{\mathfrak{w}\mathfrak{z}\} = \{\mathfrak{x}\mathfrak{y}\},$$
$$X' = \{\mathfrak{x}\mathfrak{z}\} = i\{\mathfrak{w}\mathfrak{y}\} = \frac{dX}{dt}\frac{dt}{dS} = \dot{X}\frac{1}{P}, \quad P = p + i\underline{p},$$
$$N = \{\mathfrak{x}\mathfrak{w}\} = i\{\mathfrak{y}\mathfrak{z}\},$$
$$N' = -CX', \quad \dot{N} = -CPX', \quad -CP = Q = q + i\underline{q}$$

beachten. Dann folgt

$$\begin{aligned}\dot{X} &= \{\dot{\mathfrak{x}}\mathfrak{y}\} + \{\mathfrak{x}\dot{\mathfrak{y}}\} \\ &= a_{13}\{\mathfrak{z}\mathfrak{y}\} + a_{14}\{\mathfrak{w}\mathfrak{y}\} + a_{24}\{\mathfrak{x}\mathfrak{w}\} + a_{23}\{\mathfrak{x}\mathfrak{z}\} \\ &= X'(a_{23} - i\,a_{14}) + N(a_{24} + i\,a_{13}),\end{aligned}$$

d. h.
$$a_{13} = a_{24} = 0,$$
$$a_{23} = p, \quad a_{14} = -\underline{p}$$

und
$$\begin{aligned}\dot{N} &= \{\dot{\mathfrak{x}}\mathfrak{w}\} + \{\mathfrak{x}\dot{\mathfrak{w}}\} \\ &= a_{12}\{\mathfrak{y}\mathfrak{w}\} + a_{13}\{\mathfrak{z}\mathfrak{w}\} + a_{42}\{\mathfrak{x}\mathfrak{y}\} + a_{43}\{\mathfrak{x}\mathfrak{z}\} \\ &= (a_{43} + i\,a_{12})X' + (a_{42} + i\,a_{13})X,\end{aligned}$$

d. h.
$$a_{43} = q, \quad a_{12} = \underline{q}.$$

Daraus erhalten wir die Gleichungen

$$\dot{\mathfrak{x}} = \underline{q}\,\mathfrak{y} - \underline{p}\,\mathfrak{w}, \quad \dot{\mathfrak{z}} = p\,\mathfrak{y} - q\,\mathfrak{w},$$
$$\dot{\mathfrak{y}} = \underline{q}\,\mathfrak{x} + p\,\mathfrak{z}, \quad \dot{\mathfrak{w}} = \underline{p}\,\mathfrak{x} + q\,\mathfrak{z}.$$

Versuchen wir die Invarianten der Büschelschar durch $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{w}$ auszudrücken, dann gelingt dies durch eine einfache Umrechnung. Wir wissen, daß zwischen $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ die Gleichungen

$$\mathfrak{r}\mathfrak{r} = \mathfrak{v}\mathfrak{v} = 0, \quad \mathfrak{x}\mathfrak{x} = -\mathfrak{y}\mathfrak{y} = \mathfrak{r}\mathfrak{v} = 1,$$
$$\mathfrak{r} = \lambda_{11}\mathfrak{x} + \lambda_{12}\mathfrak{y},$$
$$\mathfrak{v} = \lambda_{21}\mathfrak{x} + \lambda_{22}\mathfrak{y}$$

bestehen; das ergibt für die λ_{ik} die quadratische Gleichung

$$\lambda_{i1}^2 - \lambda_{i2}^2 = 0,$$

d. h.
$$\frac{\lambda_{11}}{\lambda_{12}} = 1, \quad \frac{\lambda_{21}}{\lambda_{22}} = -1,$$

also
$$\mathfrak{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathfrak{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathfrak{y}, \qquad \mathfrak{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathfrak{x} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathfrak{y},$$

oder
$$\mathfrak{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathfrak{r} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathfrak{v}, \qquad \mathfrak{y} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathfrak{r} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathfrak{v}.$$

Mittels dieser Formeln gewinnen wir dann die Gleichungen

$$\dot{\mathfrak{z}} = \frac{\underline{p}}{\sqrt{2}}(\mathfrak{x} - \mathfrak{y}) - q\mathfrak{w},$$

$$\dot{\mathfrak{w}} = \frac{\underline{p}}{\sqrt{2}}(\mathfrak{x} + \mathfrak{y}) + q\mathfrak{z},$$

$$\dot{\mathfrak{x}} = \underline{q}\mathfrak{x} + \frac{\underline{p}}{\sqrt{2}}\mathfrak{z} - \frac{\underline{p}}{\sqrt{2}}\mathfrak{w},$$

$$\dot{\mathfrak{y}} = -\underline{q}\mathfrak{y} - \frac{\underline{p}}{\sqrt{2}}\mathfrak{z} - \frac{\underline{p}}{\sqrt{2}}\mathfrak{w}.$$

Nun kann man $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ noch so normieren, daß $\dot{\mathfrak{x}}\mathfrak{y} = \mathfrak{x}\dot{\mathfrak{y}} = 0$ ist, ohne daß die Gleichung $\mathfrak{x}\mathfrak{y} = 1$ zerstört wird:

$$\hat{\mathfrak{x}} = \mu(t)\,\mathfrak{x}, \qquad \hat{\mathfrak{y}} = \frac{1}{\mu(t)}\mathfrak{y},$$

$$\dot{\hat{\mathfrak{x}}} = \dot{\mu}\mathfrak{x} + \mu\dot{\mathfrak{x}}, \qquad \dot{\hat{\mathfrak{x}}}\hat{\mathfrak{y}} = \frac{\dot{\mu}}{\mu} + \dot{\mathfrak{x}}\mathfrak{y}.$$

Für $\dot{\hat{\mathfrak{x}}}\hat{\mathfrak{y}} = 0$ ist $\mu = \text{const}\, e^{-\int \dot{\mathfrak{x}}\mathfrak{y}\, dt}$ zu setzen. $\hat{\mathfrak{x}}$ und $\hat{\mathfrak{y}}$ sind in ihrer Normierung bis auf Transformationen der Form $\hat{\mathfrak{x}} = \text{const}\,\mathfrak{x}$ und $\hat{\mathfrak{y}} = \frac{1}{\text{const}}\mathfrak{y}$ festgelegt. Im folgenden soll das Normierungszeichen wieder fortgelassen werden.

Erfüllen die beiden Büschel X und $X + X'\,dS$ z. B. die Bedingung $\underline{p} = 0$, dann bedeutet das, daß $\dot{\mathfrak{w}}$ in obigen Formeln an die Stelle von $\dot{\mathfrak{z}}$ gesetzt werden kann. Bezeichnen wir weiter

$$\frac{\dot{\mathfrak{w}}}{q} = \mathfrak{w}' \quad \text{und} \quad q = \frac{d\sigma}{dt},$$

dann erhalten wir

$$\mathfrak{x}' = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\mu p}{q}\mathfrak{w}',$$

$$\mathfrak{y}' = -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{p}{\mu q}\mathfrak{w}',$$

$$\mathfrak{w}'' = \frac{p}{q\sqrt{2}}\left(\frac{\mathfrak{x}}{\mu} - \mathfrak{y}\mu\right) - \mathfrak{w}.$$

Dies sind aber genau dieselben Formeln, wie (21), nur daß $\mathfrak{x}$ statt $\overline{\mathfrak{y}}$ gesetzt ist. Wir sind demnach durch Nullsetzen von $\underline{p}$ zu dem angegebenen Spezialfall gelangt.

Lebenslauf.

Am 8. Dezember 1912 wurde ich, Margarete Salzert, als Tochter des praktischen Arztes Dr. Johannes Salzert in Berlin-Schöneberg geboren. Dort besuchte ich vom April 1919 an das Realgymnasium der Chamissoschule, wo mir am 17. Februar 1932 das Zeugnis der Reife zuerkannt wurde. Nach einem halbjährigen Aufenthalt in England ließ ich mich im Winter 1932 in der Wirtschaftshochschule zu Berlin immatrikulieren. Da mich jedoch das Studium der Mathematik und Physik besonders anzog, beschloß ich, mich diesem ganz zu widmen. Seit April 1933 studierte ich ausschließlich auf der Universität Berlin. Dort besuchte ich die Vorlesungen und Übungen der Herren Professoren und Dozenten BIEBERBACH, CZERNY, FEIGL, HENNING, KLOSE, KNOTHE, E. SCHMIDT und WEHNELT.

Allen diesen Herren danke ich an dieser Stelle, besonders bin ich Herrn Professor Dr. BIEBERBACH und Herrn Dozent Dr. KNOTHE zu großem Danke verpflichtet, da sie mir mit Rat und Tat während der Anfertigung dieser Arbeit zur Seite standen.